Literatur

1). Dirk H. Träger
Einführung in die Fuzzy-Logik
Teubner, Stuttgart, 1994.

2). Hans Bandemer und Siegfried Gottwald
Einführung in die Fuzzy Methoden
4. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1993

3). Hans Bandemer and Siegfried Gottwald
Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods with Applications
John Wiley & Sons, Chichester 1995.

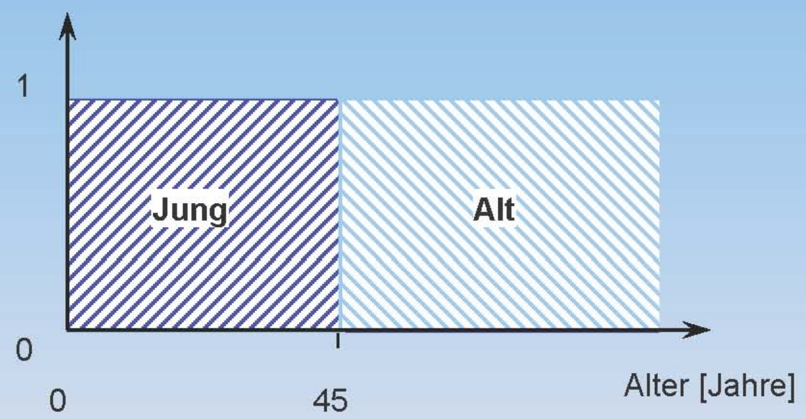
4). George J. Klir and Bo Yuan
Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Applications
Prentice Hall, 1995.

5). Hans-Jürgen Zimmermann
Fuzzy set theory and its applications
2nd ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

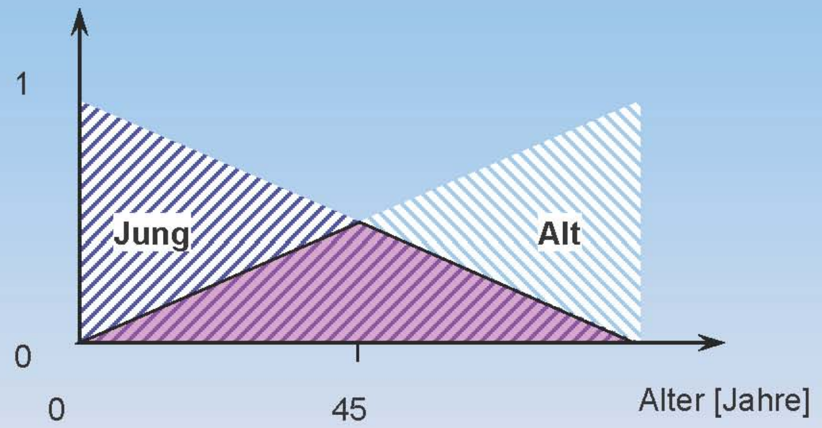
Ein Beispiel

Einteilung der Menschen in „jung“ und „alt“

„Scharfe“ Logik



Fuzzy-Logik



Fuzzy Set

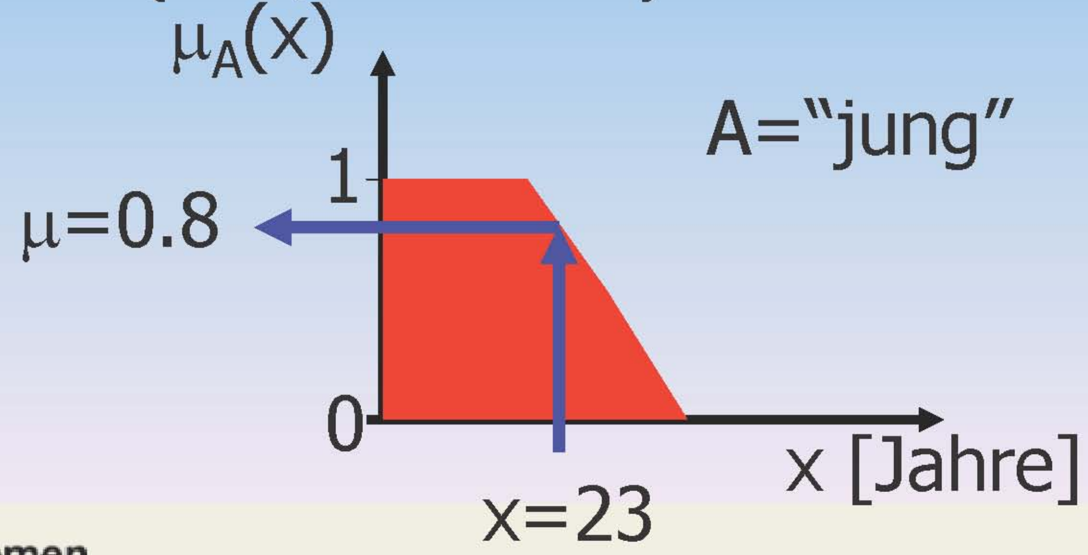
Definition :

Fuzzy Menge $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$

- Basismenge X
- Membership Funktion $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$

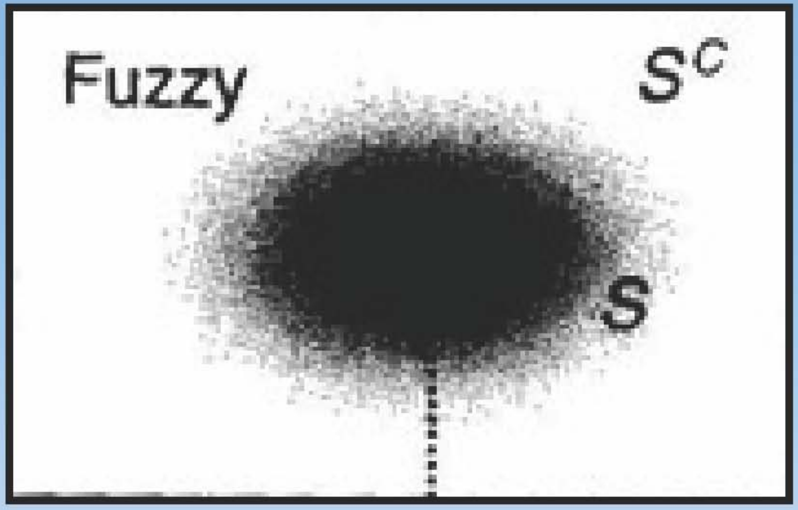
Beispiel: Begriff "jung" als Fuzzy-Menge

Basismenge $X := \{x \in R;\ 0 \leq x \leq 100\}$



Fuzzymengen

X

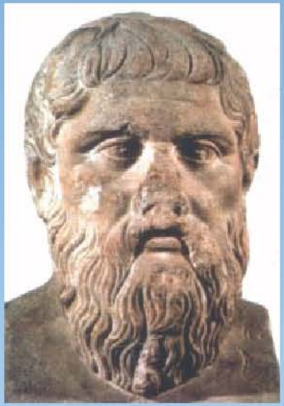


Membership Funktion $\mu_X : X \to [0,1]$

(X, μ_X) repräsentiert die Fuzzymenge S

Geschichte

Platon (427-347 a.d.)



Vermutung: es gibt eine dritte Region zwischen „wahr“ und „falsch“

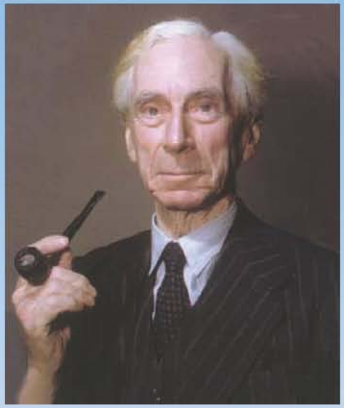
Aristoteles (384-322 a.d.)

Das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
(bestimmt die Entwicklung mathematischer und logischer Systeme in den nächsten zwei Jahrtausenden)

Geschichte

Moderne Philosophen wie **G. Hegel** und **B. Russel** nahmen Platons Vermutung wieder auf.

Georg Hegel (1770-1831) **B. Russell** (1872-1970)



Russel: „The law of the excluded middle is true, when precise symbols are employed, but it is not true, when symbols are vague, as, in fact, all symbols are.“

Geschichte

J. Lukasiewicz (1878-1956)

- systematische Alternative zur zweiwertigen Logik
- „wahr (1)“, „possible (1/2)“, „falsch(0)“
- später vier und fünfwertige Logik
- schließlich unendlichwertige Logik „alle Zahlen im Intervall [0,1]“

M. Black (1909-1988)

- Verfahren zur numerischen Darstellung von Unschärfe von Symbolen (in Anlehnung an Russel)
- Definition der Ungenauigkeit oder Vagheit eines Symbols unter Zuhilfenahme des Komplements: es gibt mindestens ein Element, das weder vollständig zum Symbol noch vollständig zum Komplement gehört
- Menge der Elemente, die nicht eindeutig zugeordnet werden können: „frings“ = Fransen

Geschichte

Lotfi Zadeh (geb. 1921)

- grundlegender Artikel „**Fuzzy-Sets“ (1965)**
- Theorie der unscharfen Mengen
- verbindet darin Blacks Idee der „frings“ mit Lukasiewiczs unendlichwertiger Logik

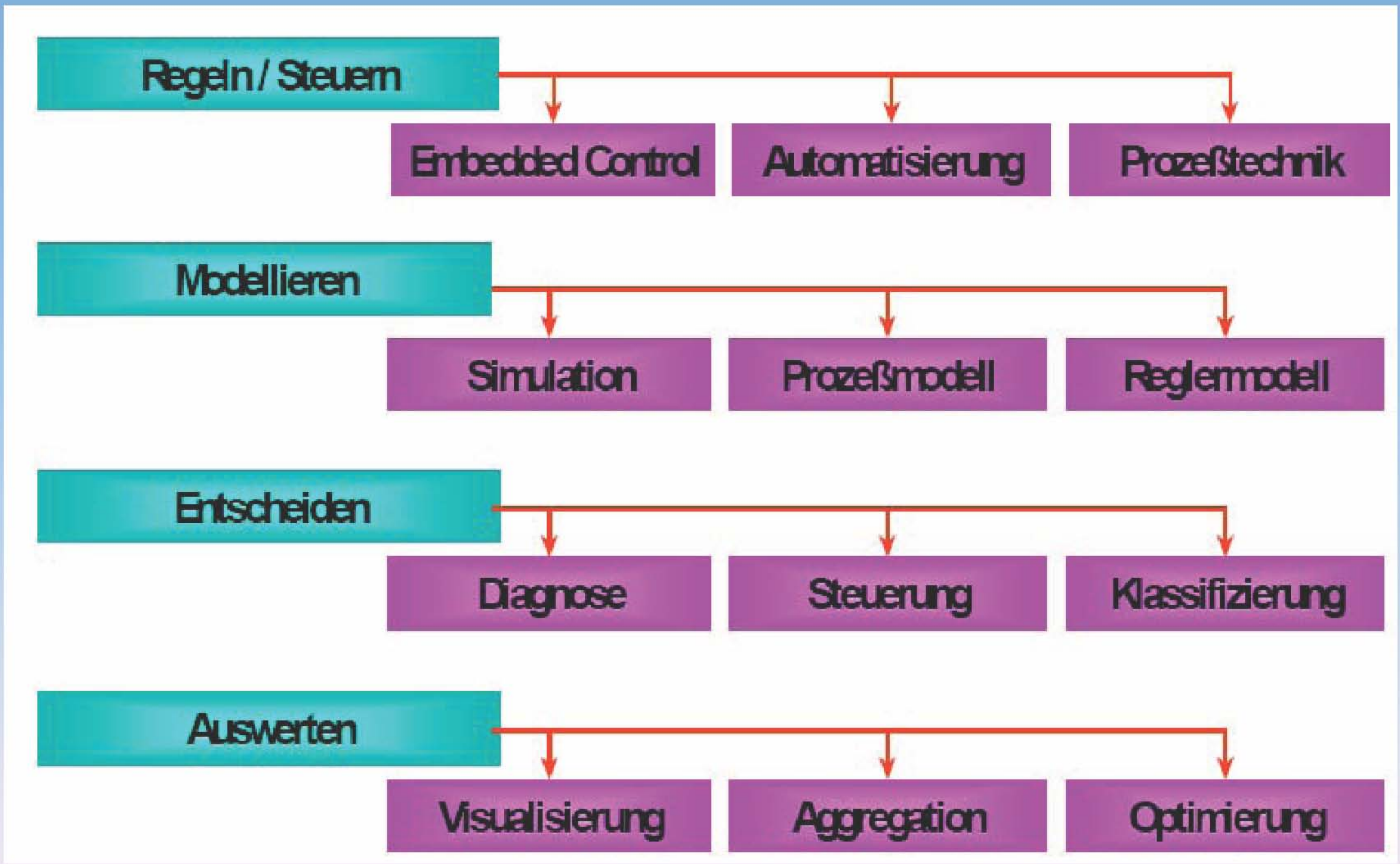
Theorie der unscharfen Mengen wurde durch die Beobachtung Lotfi ZADEHs ausgelöst, dass Menschen anscheinend in Kategorien denken und kommunizieren, die sich von den in Mengenlehre und Logik verwendeten (dualen) Strukturen unterscheiden.

Dies war zwar schon früher erkannt worden, aber ZADEH war der erste, den diese Beobachtung zur Formulierung einer neuen Theorie veranlasste.

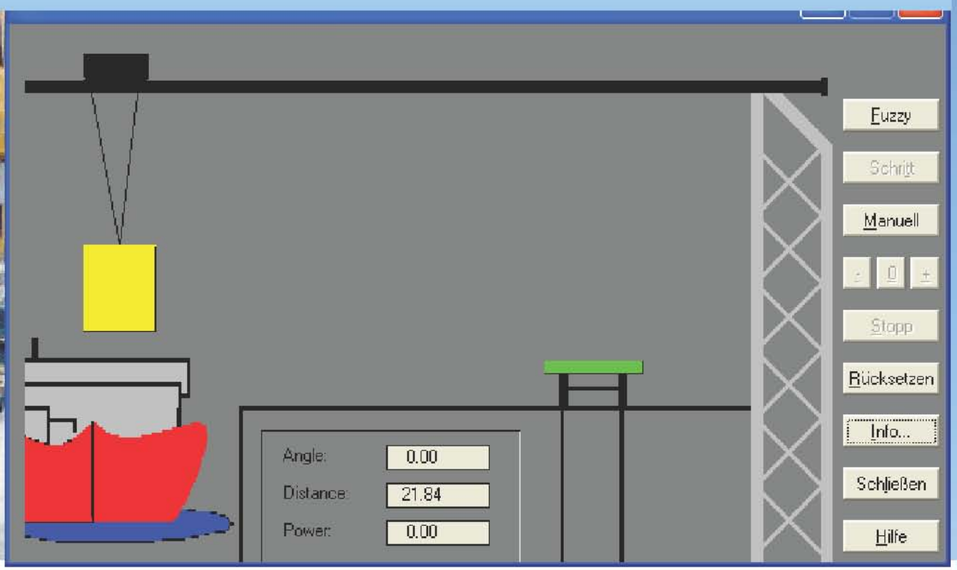
Geschichte der Fuzzy-Logik

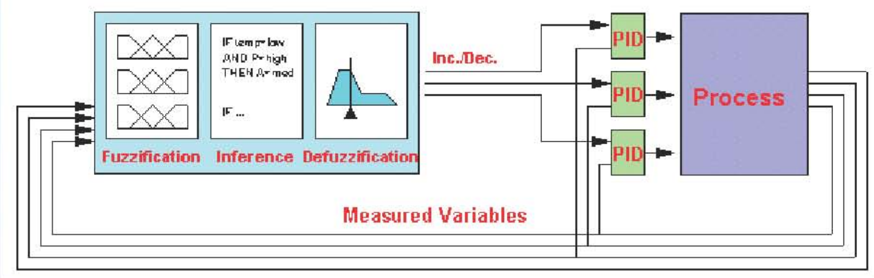
- **1965** Entwicklung der “Theorie unscharfer Mengen” von Lotfi Asker **Zadeh**, Professor für Systemtheorie der Fakultät Elektrotechnik, Berkeley
- 1970 Erster Einsatz von Fuzzy Logik in der Regelungstechnik (Europa)
- **1975** Einführung der Fuzzy Logik in Japan
- **1980** Weiterentwicklung der Fuzzy Logik in Europa
- Ab **1985** breiter Einsatz der Fuzzy Logik in Japan, USA, und Europa
- **2000 Fuzzy Logik ist Standardtechnologie**, Einsatz auch in Sensorik und Datenanalyse, usw.

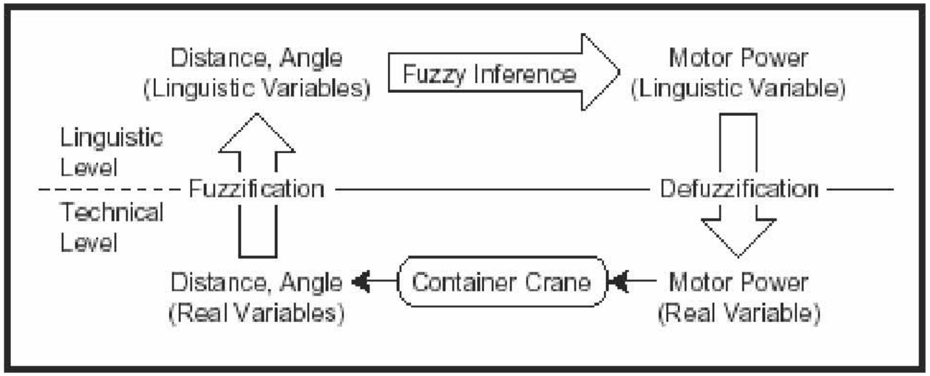
Anwendungen intelligenter Technologien



Ein Expertensystem zur automatischen Steuerung eines Krans

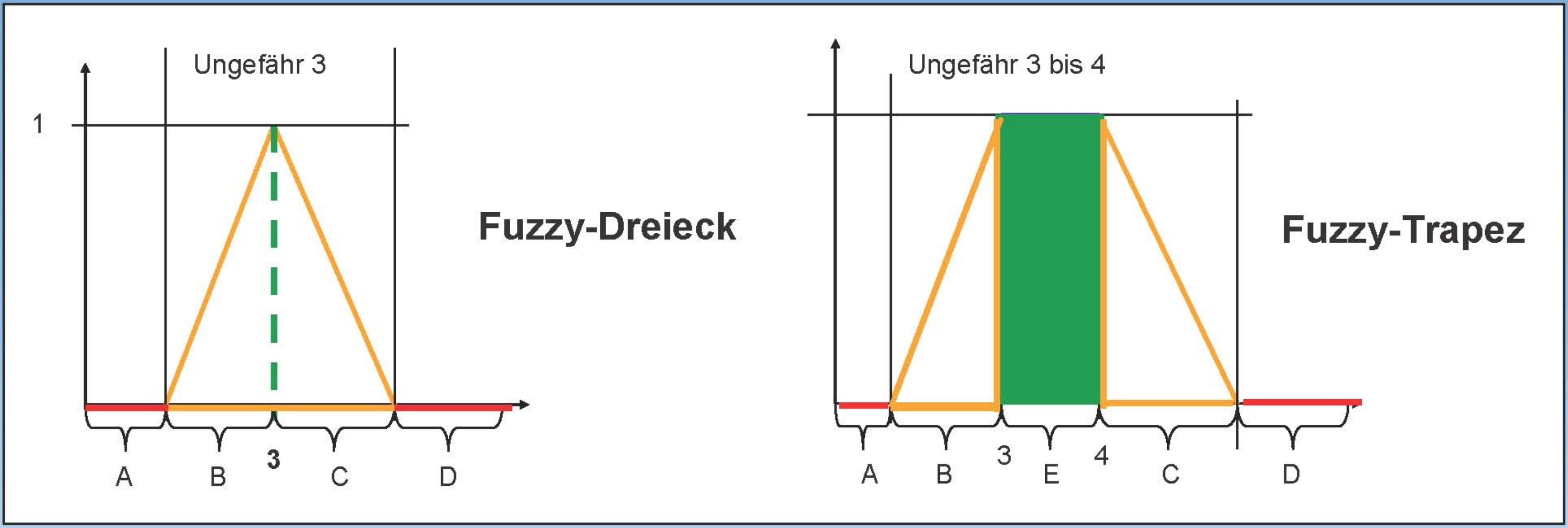






* Fuzzy-tech

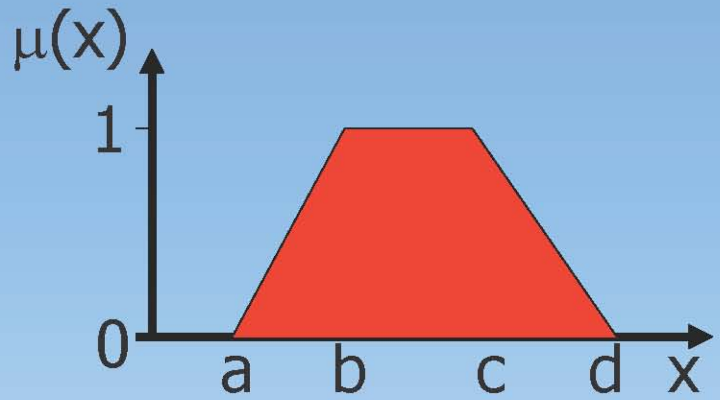
Darstellungsformen in der Fuzzy-Logik



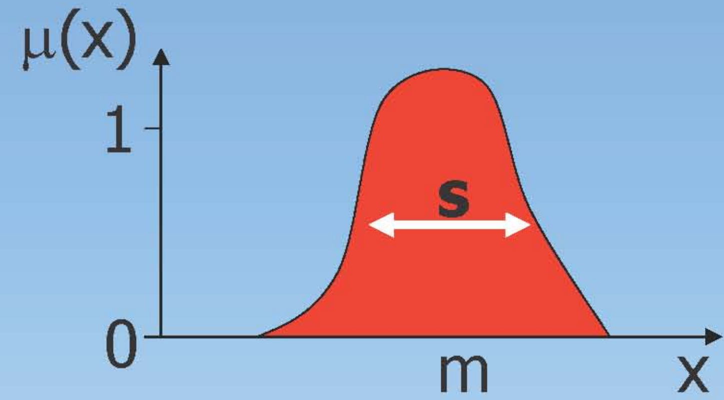
Bereich A: Sicher nicht
Bereich B: Vielleicht, Tendenz steigend
Bereich C: Vielleicht, Tendenz fallend
Bereich D: Sicher nicht
Bereich E: Ganz sicher

Typen von Membership Funktionen

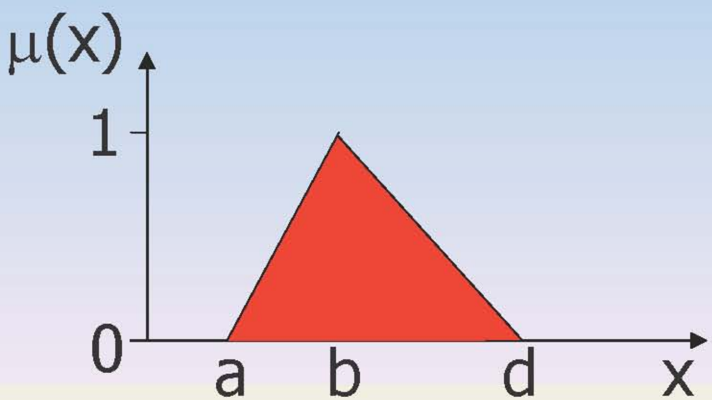
Trapez: <a,b,c,d>



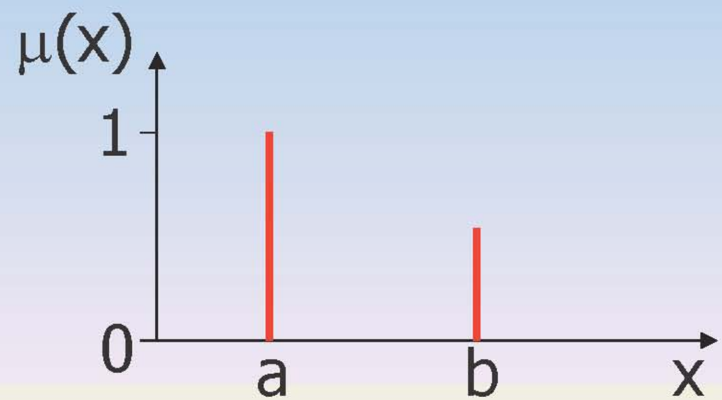
Gauss: N(m,s)



Dreieck: <a,b,b,d>



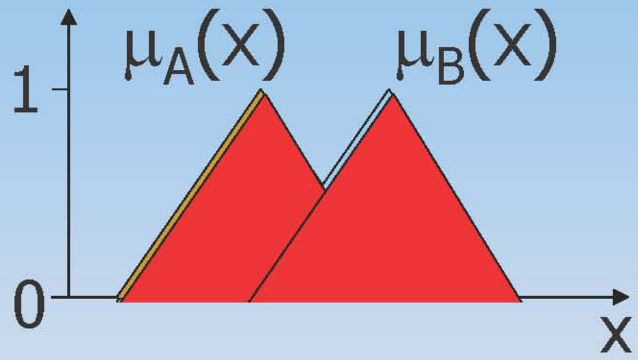
Singleton: (a,1) and (b,0.5)



Operatoren auf Fuzzy Mengen

Vereinigung

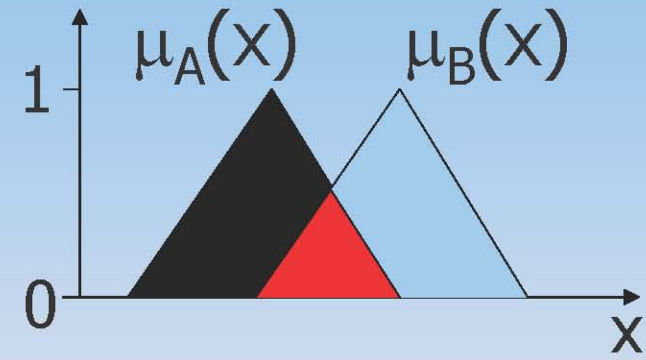
$\mu_{A \vee B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$



„oder“

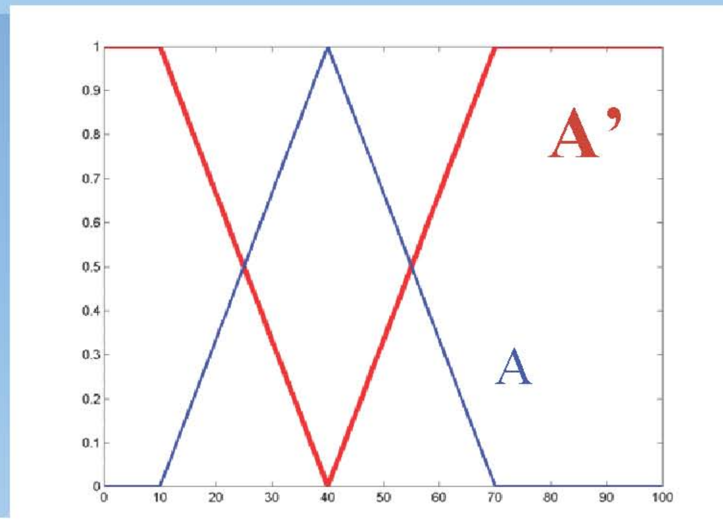
Durchschnitt (Intersection)

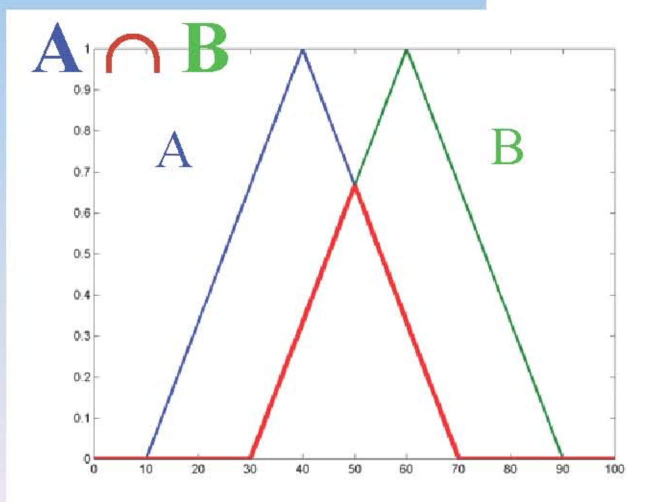
$\mu_{A \wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

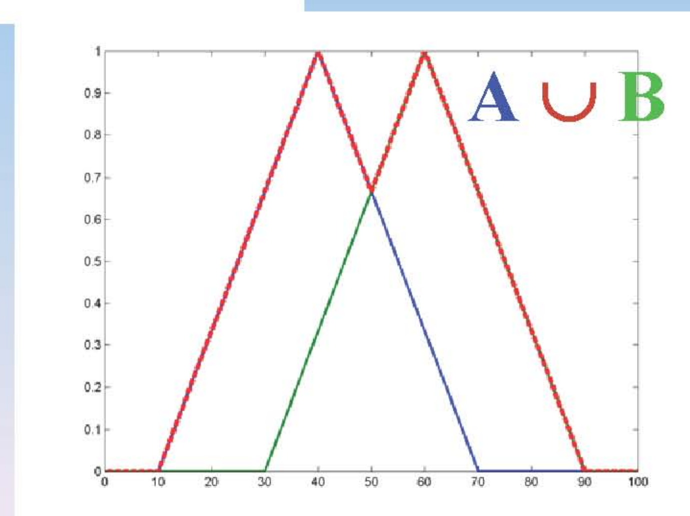


„und“

Beispiele von Fuzzy-Mengen Operationen







Fuzzy logische Operationen

Fuzzy Logik ist eine Obermenge der klassischen Aussagenlogik

- **NICHT** A = A' = $1 - \mu_A(x)$
- A **UND** B = $A \cap B$ = $\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
- A **ODER** B = $A \cup B$ = $\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

min(A,B)

A	B	A und B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

max(A,B)

A	B	A oder B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1-A

A	nicht A
0	1
1	0

Komplement

Negation: $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Rechenregeln der klassischen Aussagenlogik gelten nicht :

$$\mu_{\neg A \vee A}(x) \equiv 1$$
$$\mu_{\neg A \wedge A}(x) \equiv 0$$

Beispiel : $\mu_A(x) = 0.6$

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) = 0.4$$
$$\mu_{\neg A \vee A}(x) = \max(0.6,0.4) = 0.6 \neq 1$$
$$\mu_{\neg A \wedge A}(x) = \min(0.6,0.4) = 0.4 \neq 0$$

Auswertung von Fuzzyregeln

- Aussagenlogik: $p \Rightarrow q$
  Wenn p wahr ist, dann ist q wahr

- In Fuzzy Logik: $p \Rightarrow q$
  Wenn p zu einem gewissen Grad wahr ist, dann ist q zu einem gewissen Grad wahr

  0.5p => 0.7q (Grad der Erfüllbarkeit der Voraussetzung impliziert Grad der Konklusion)

- Wie?

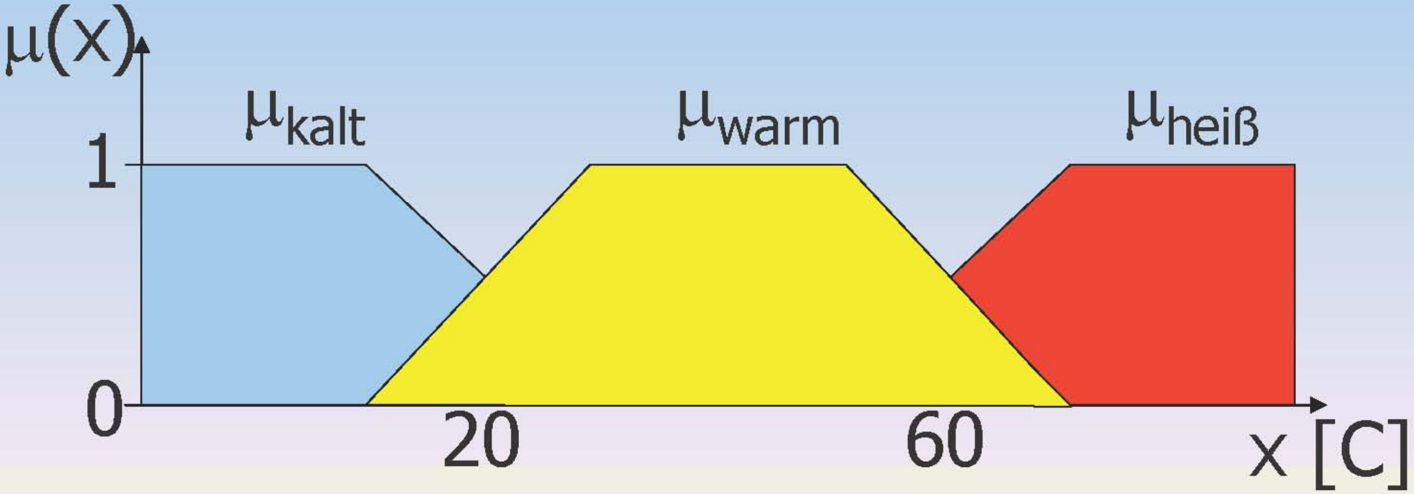
Fuzzy Mengen Operatoren

- **Gleichheit**
  $A = B$
  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ für alle $x \in X$
- **Komplement**
  A'
  $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ für alle $x \in X$
- **Enthalten**
  $A \subseteq B$
  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ für alle $x \in X$
- **Vereinigung**
  $A \cup B$
  $\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ für alle $x \in X$
- **Durchschnitt**
  $A \cap B$
  $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ für alle $x \in X$

Fuzzy Mengen & Linguistische Variable

Eine *linguistische Variable* umfasst mehrere Fuzzy Mengen.

Linguistische Variable : Temperatur
Linguistische Terme (Fuzzy mengen) : { kalt, warm, heiß }



Binäre Relation

Eine (klassische) binäre Relation R zwischen den Mengen X und Y ist eine Teilmenge $R \subset X \times Y$

Definition $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1]$

$$\mu_R(x,y) := \begin{cases} 1 \text{ falls } (x,y) \in R \\ 0 \text{ falls } (x,y) \notin R \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$R = \{(x,y) \in X \times Y;\ \mu_R(x,y) = 1\}$$

Die Relation R kann somit durch $(X \times Y,\ \mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1])$ äquivalent beschrieben werden.

Fuzzy Relationen

Definition Sei $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1]$ eine beliebige Abbildung. Dann heißt
$(X \times Y, \mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1])$ eine **Fuzzy-Relation.**

Fuzzy Relationen

Beispiele endlicher Fuzzy-Relationen

Entfernung von deutschen Städten
X:={Osnabrück, Dresden, München} und
Y:={Bremen, Hamburg}.

Fuzzy-Relation ist **weit entfernt von** wird dann durch folgende Matrix gegeben:

$$T := \begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} \text{Bremen} & \text{Hamburg} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Osnabrück} \\ \text{Dresden} \\ \text{München} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fuzzy Relationen

Beispiele endlicher Fuzzy-Relationen

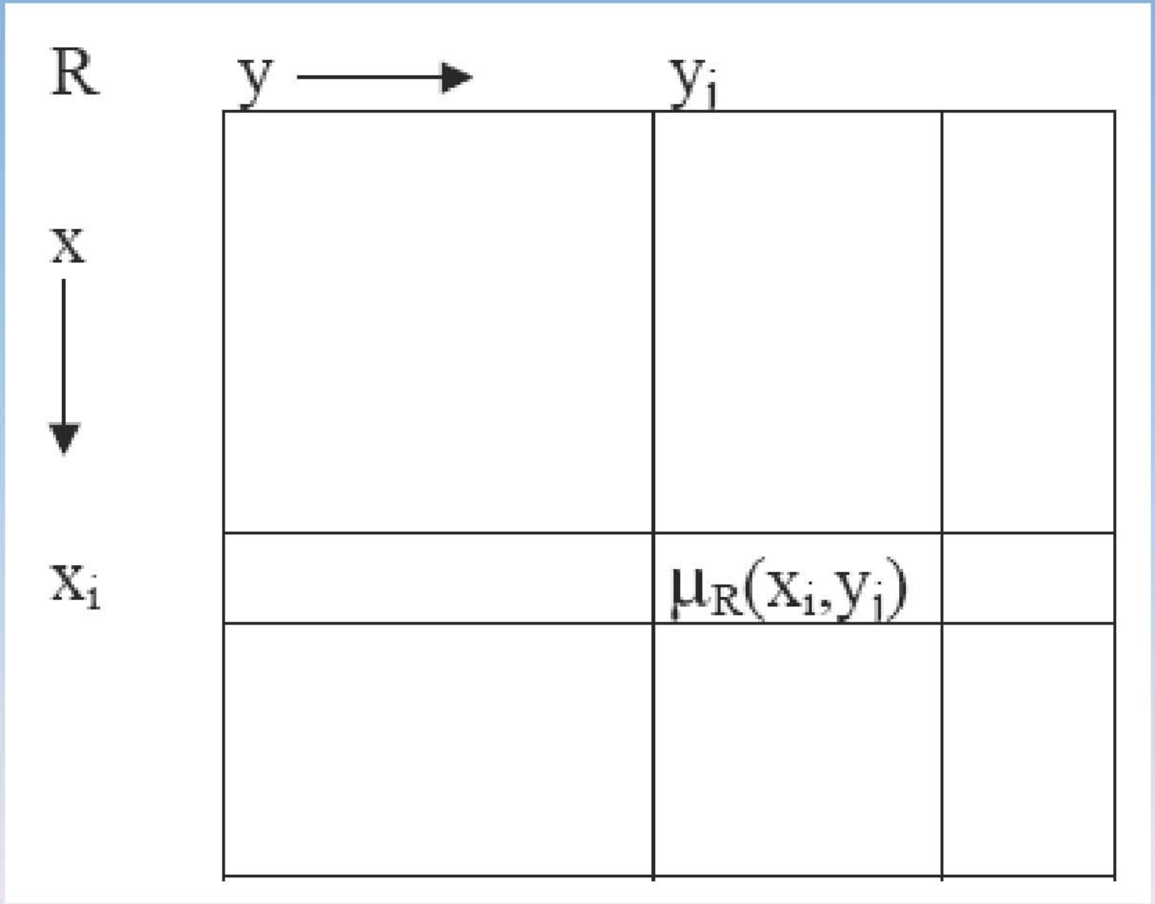
X = { regnerisch, bewölkt, sonnig }

Y = { schwimmen, radfahren, campen, lesen }

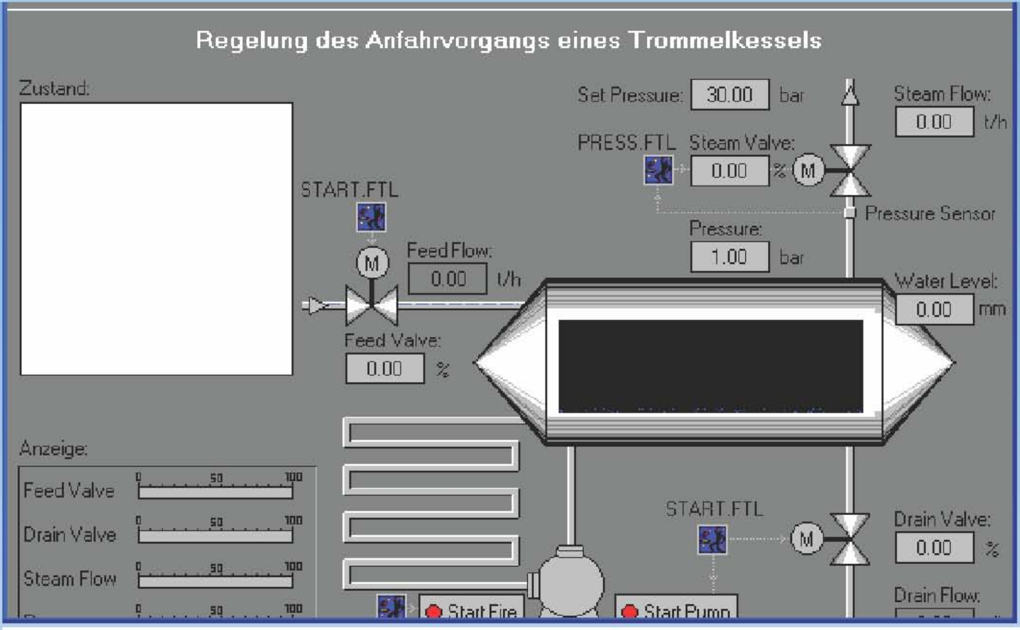
X/Y	schwimmen	radfahren	campen	lesen
regnerisch	0.0	0.2	0.0	1.0
bewölkt	0.0	0.8	0.3	0.3
sonnig	1.0	0.2	0.7	0.0

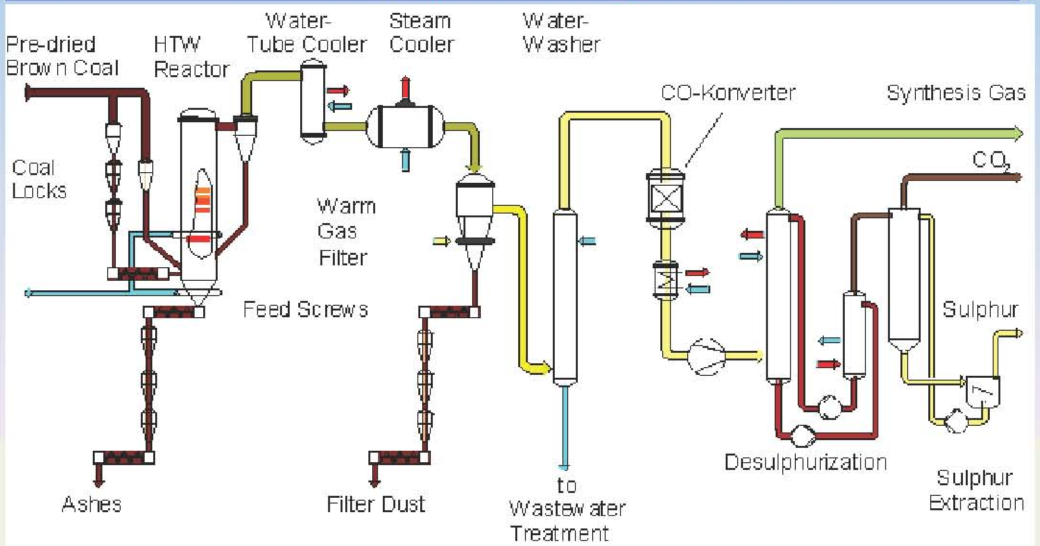
Fuzzy Relationen

Matrix –Darstellung endlicher Fuzzy-Relationen



Ein Fuzzysystem zur Steuerung eines Heizkraftwerkes





Universität Bremen