Mathematik 1 für Informatiker

Einführung
In Fuzzy Logik und
Fuzzy SystemTheorie

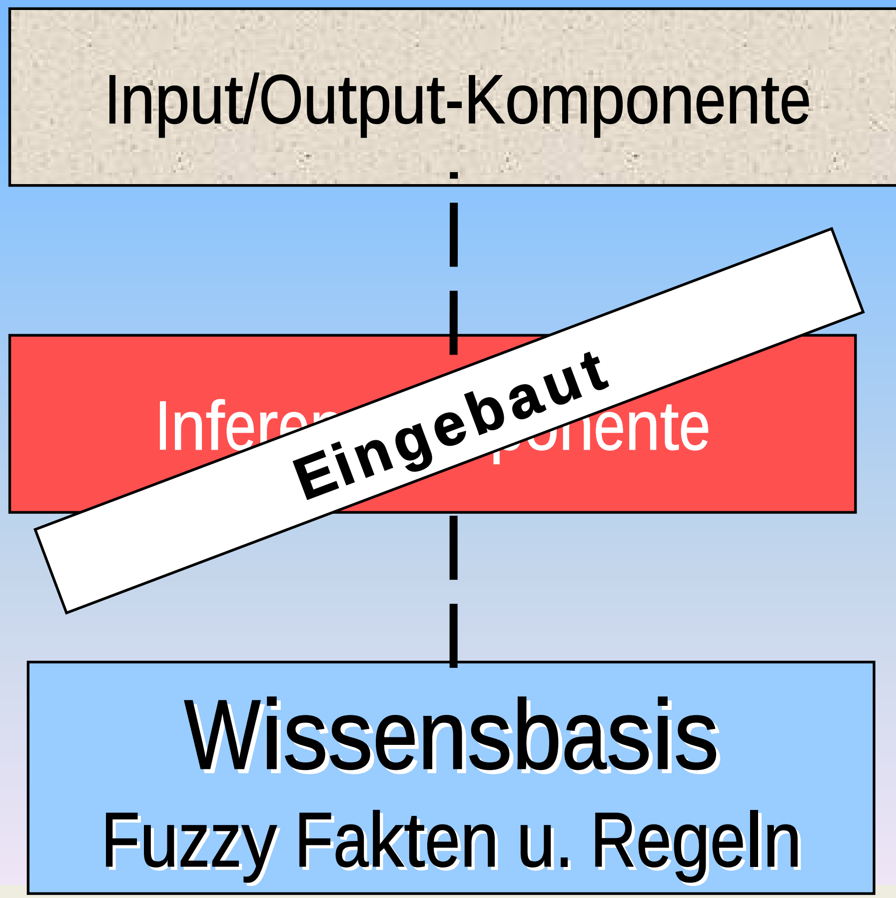
Teil 3

05.12.2006

M. B. Wischnewsky

Wissenrepräsentation u. Verarbeitung
Fuzzy Systeme

Das Prinzip von Fuzzy-Systemen



(2-stellige) Fuzzy Relationen

Definition Sei $\mu_{\mathbf{R}} : X \times Y \rightarrow [0,1]$ eine beliebige Abbildung. Dann heißt $(X \times Y, \mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1])$ eine **Fuzzy-Relation.**

n-stellige Fuzzy-Relation

Definition

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ klassische Mengen und deren kartesisches Produkt die Grundmenge $G = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Sei ferner:

$$\mu_R : G \longrightarrow [0,1]$$

eine n-stellige Mitgliedsgradfunktion.

Dann heißt die Menge der mittels μ_R bewerteten Paare

$$R = \{((x_1, x_2, \ldots, x_n), \mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n))\ x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$$

eine n-stellige Fuzzy-Relation ($n \geq 2$).

Cartesisches Produkt von Fuzzy-Mengen

Definition

Seien $\mu_1 : G_1 \rightarrow [0,1]$, $\mu_2 : G_2 \rightarrow [0,1]$ Fuzzy-Mengen.

Dann ist das **Kreuzprodukt** (**cartesisches Produkt**)

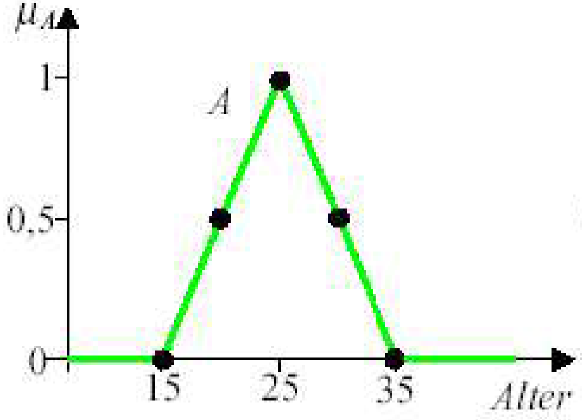
$$\mu_1 \times \mu_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow [0,1]$$

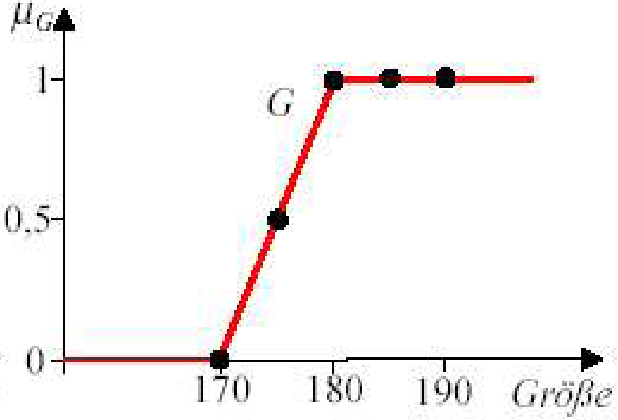
gegeben durch

$$(\mu_1 \times \mu_2)(x,y) := \min(\mu_1(x), \mu_2(y)),\ (x,y) \in G1 \times G2$$

Cartesisches Produkt von Fuzzy-Mengen

Beispiel: Relation: *junger Mann* ..... *großer Mann*

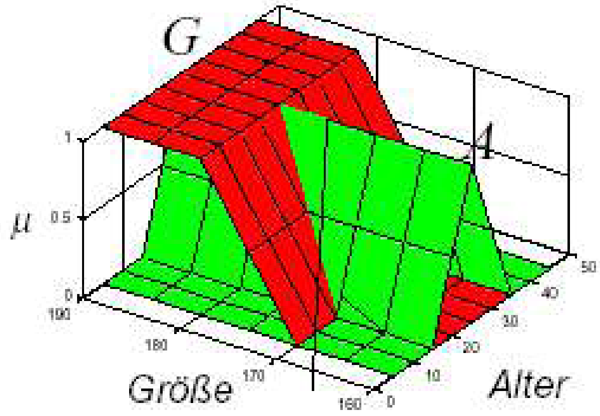


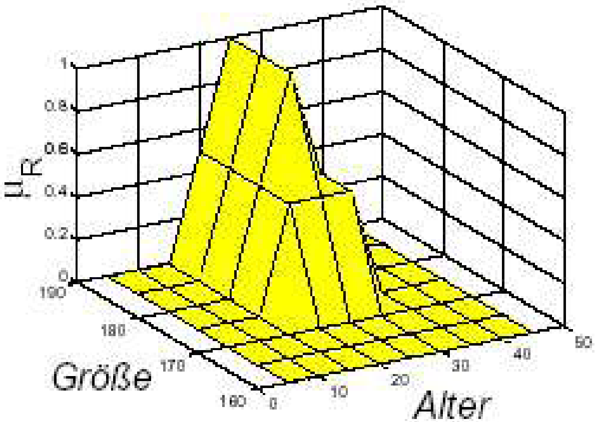


ein *junger großer Mann* ?

junger Mann UND großer Mann

μ_R (Alter ,Größe):=min(μ_A(Alter), μ_G(Größe))





max-min Komposition

Gegeben seien die Fuzzy-Relationen

$R_1 = R_1(X,Y)$ auf $X \times Y$ und

$R_2 = R_2(Y,Z)$ auf $Y \times Z$.

Definition max-min Komposition

Als **max-min Komposition** von R_1 und R_2 versteht man die Fuzzy-Relation $R_1 \circ R_2(X,Z)$ auf $X \times Z$

gemäß der Mitgliedsgradfunktionen

$$\mu_{R1 \circ R2}(x,z) = \max_{y \in Y} \left(\min \left(\mu_{R1}(x,y), \mu_{R2}(y,z) \right) \right)$$

max-min Komposition

Beispiel: Gegeben seien die Mengen
X := {x1, x2}
Y := {y1, y2, y3}
Z := {z1, z2}
sowie die Fuzzy-Relationen R und S durch

R	y1	y2	y3
x1	0.2	0.6	0.9
x2	0.4	0.6	1

S	z1	z2
y1	0.1	0.5
y2	0.6	0.4
y3	0.8	0.9

$$X \xrightarrow{R} Y \xrightarrow{S} Z$$

S	z1	z2
y1	0.1	0.5
y2	0.6	0.4
	0.8	0.9

R	y1	y2	y3		
x1	0.2	0.6	0.9	0.8	0.9
x2	0.4	0.6	1	0.8	0.9

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_{y \in Y} (\min (\mu_R(x,y), \mu_S(y,z)))$$

$$\mu_{R \circ S}(x1,z1) = \max (\min (0.2,0.1), \min (0.6,0.6), \min (0.9,0.8))$$

$$\mu_{R \circ S}(x1,z2) = \max (\min (0.2,0.5), \min (0.6,0.4), \min (0.9,0.9))$$

max-min Komposition
Fuzzy Relationen Matrizen

- **Beispiel: Farbe-Reife Relation für Tomaten**

R(x, y)	unreif	halbreif	reif
grün	1	0.5	0
gelb	0.3	1	0.4
rot	0	0.2	1

max-min Komposition
Fuzzy Relationen Matrizen

- **Beispiel: Reifegrad-Geschmack Relation für Tomaten**

S(x, y)	sauer	süßsauer	süß
unreif	1	0.2	0
halbreif	0.7	1	0.3
reif	0	0.7	1

max-min Komposition

Fuzzy Relationen Matrizen

- **Beispiel:** Farbe-Geschmack Relation für Tomaten als Verknüpfung der Relationen Farbe-Reife und Reife-Geschmack.

R*S(x, y)	sauer	süßsauer	süß
grün	1	0.5	0.3
gelb	0.7	1	0.4
rot	0.2	0.7	1

Fuzzy-Inferenz

Definition. Seien $\mu_R : X x Y \rightarrow [0,1]$ eine zweistellige Fuzzyrelation und

$\mu_1: X \rightarrow [0,1]$ eine Fuzzy-Menge,

Das **Inferenz-Bild von μ_1 unter μ_R** ist die Fuzzy-Menge

$\mu_2: Y \rightarrow [0,1]$ definiert durch

$$\boldsymbol{\mu_2(y) := \max_{x \in X} (\min(\mu_1(x), \mu_R(x,y))}$$

Fuzzy-Inferenz-Schema

Definition
Gegeben sei
Fuzzy-Regel: WENN A DANN B
Faktum (Fuzzy-Menge): A'
Schluss (Fuzzy-Menge): : Dann ist B'

Sei die Fuzzy-Regel durch die Relation μ_R repräsentiert.Dann lautet das zugehörige Fuzzy-Inferenz-Schema zur Berechnung der Fuzzy-Menge $\mu_{B'}$ in der MAX-MIN Kompostion

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in G_1} (\min (\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y))), \; y \in G_2$$

Mamdani-Implikation

Dies ist die für die Fuzzy-Regelung wichtigste Implikation. Bei ihr wird die gewöhnliche Implikation $A \rightarrow B$ durch die Konjunktion $A \wedge B$ repräsentiert. Dies ergibt die unscharfe Relation $\mu_{A \rightarrow B}$.

Definition (Mandami-Implikation)

Seien μ_A und μ_B zwei Fuzzy-Mengen über den Grundmengen X und Y.

$$\mu_{x \rightarrow y}(x,y) := \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

$\mu_{x \rightarrow y}(x,y)$ heißt **Fuzzy-Implikation** oder Wenn-Dann-Regel.

Bemerkung: Es gibt zahlreiche weitere Definitionen für Fuzzy-Implikationen, die Erweiterungen der Implikation der klassischen Aussagenlogik sind.

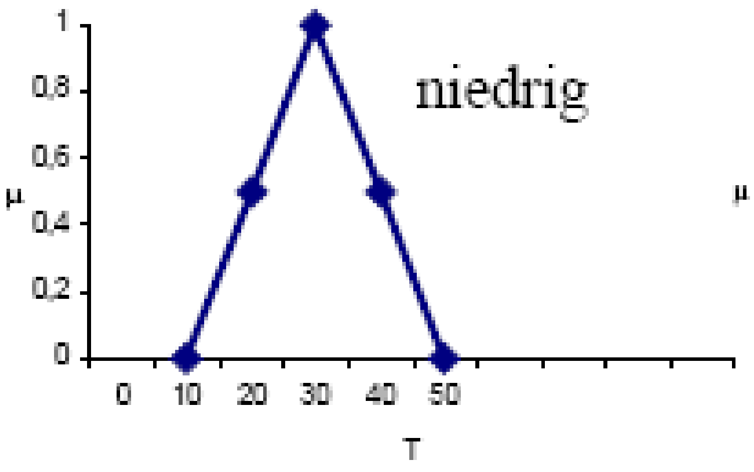
Fuzzy-Implikation

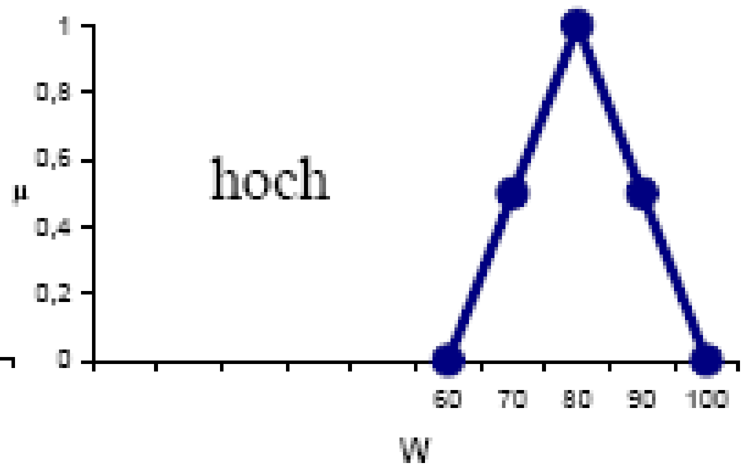
Beispiel: Erhitzen von Wasser

Wir betrachten die Regel

R : WENN Temperatur T = niedrig DANN Wärmezufuhr W = hoch

Mit den folgenden Zugehörigkeitsfunktionen für die linguistischen Terme:





Mamdani-Implikation

Dies ist die für die Fuzzy-Regelung wichtigste Implikation. Bei ihr wird die gewöhnliche Implikation $A \rightarrow B$ durch die Konjunktion $A \wedge B$ repräsentiert. Dies ergibt die unscharfe Relation $\mu_{A \rightarrow B}$.

Definition (Mandami-Implikation)

Seien μ_A und μ_B zwei Fuzzy-Mengen über den Grundmengen X und Y.

$$\mu_{x \rightarrow y} (x,y) := \min(\mu_A (x), \mu_B (y))$$

$\mu_{x \rightarrow y} (x,y)$ heißt **Fuzzy-Implikation** oder Wenn-Dann-Regel.

Bemerkung: Es gibt zahlreiche weitere Definitionen für Fuzzy-Implikationen, die Erweiterungen der Implikation der klassischen Aussagenlogik sind.

Fuzzy-Implikation

Das allgemeine Fuzzy-Inferenz-Schema lautet

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in G_1} (\min (\mu_{A'}(x), \mu_R(x,y))), \; y \in G_2$$

Spezialfall:

Seien $\mu_R (x,y) = \mu_{x \rightarrow y} (x,y) := \min(\mu_A (x), \mu_B (y))$ und

x' ein scharfer Eingangswert. x' definiert eine Fuzzy-Menge A' durch $\mu_{A'} (x) = 1$ für $x=x'$ und $\mu_{A'} (x) = 0$ für $x \neq x'$ (die Fuzzy-Menge heißt Singleton)

Dann gilt

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in X} (\min(\mu_{A'}(x), \mu_R (x,y))= \mu_R (x,y)= \min(\mu_A (x'), \mu_B (y))$$

Also gilt: $\boxed{\mu_{B'}(y) = \min(\mu_A (x'), \mu_B (y))}$

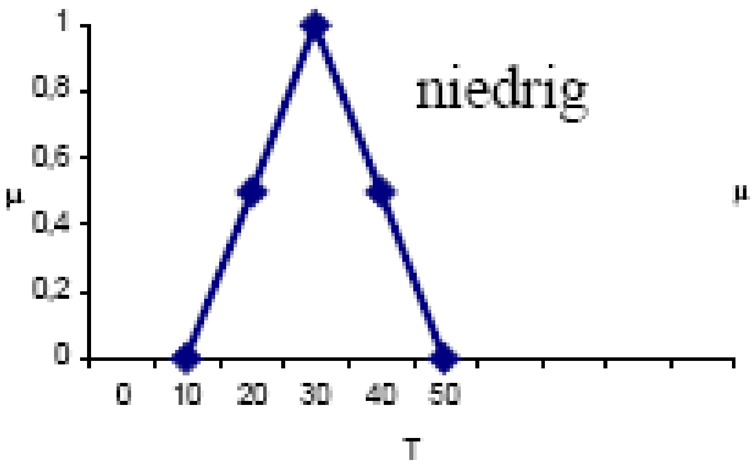
Fuzzy-Implikation

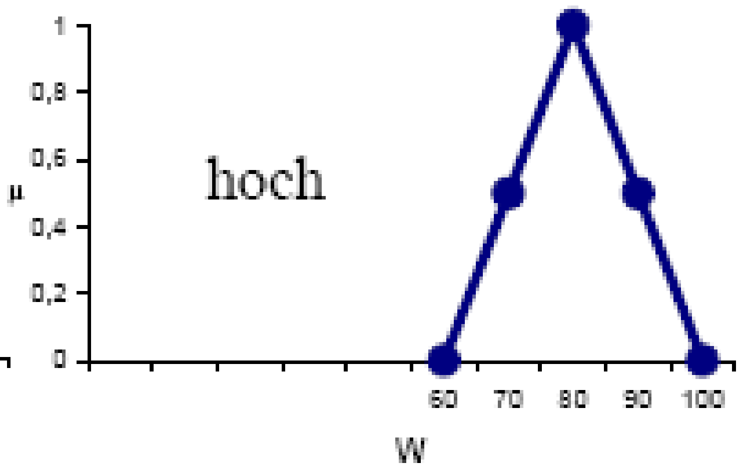
Beispiel: Erhitzen von Wasser

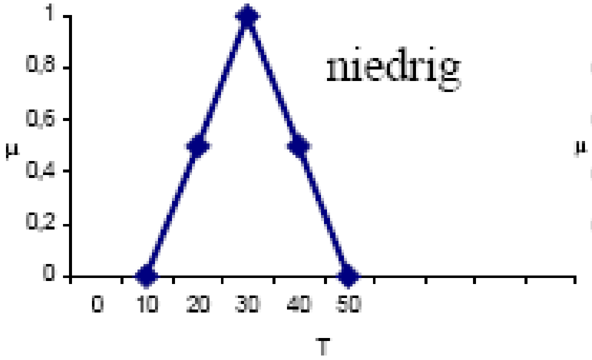
Wir betrachten die Regel

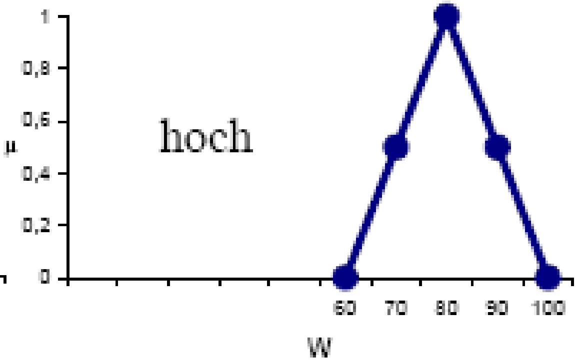
R : WENN Temperatur T = niedrig DANN Wärmezufuhr W = hoch

Mit den folgenden Zugehörigkeitsfunktionen für die linguistischen Terme:









Diskretisierierung der Fuzzy-Mengen über

X = {10, 20, 30, 40, 50} und Y = {60, 70, 80, 90, 100}

$\mu_{T \rightarrow W}(T, W) := \min(\mu_T(T), \mu_W(W))$

T/W	60	70	80	90	100
10	0	0	0	0	0
20	0	0.5	0.5	0.5	0
30	0	0.5	1	0.5	0
40	0	0.5	0.5	0.5	0
50	0	0	0	0	0

Als Inferenzergebnis erhalten wir die Fuzzy-Menge

$\mu_{W\,hoch'}(W) \quad = \mu_R(T = 20°C, W)$

$= MIN(\mu_{T'\,niedrig'}(20°C), \mu_{W\,hoch}(W))$

Der Term $\mu_R(T = 20°C, W)$ stellt die zur Temperatur T = 20°C gehörige Zeile unserer Relationsmatrix dar.

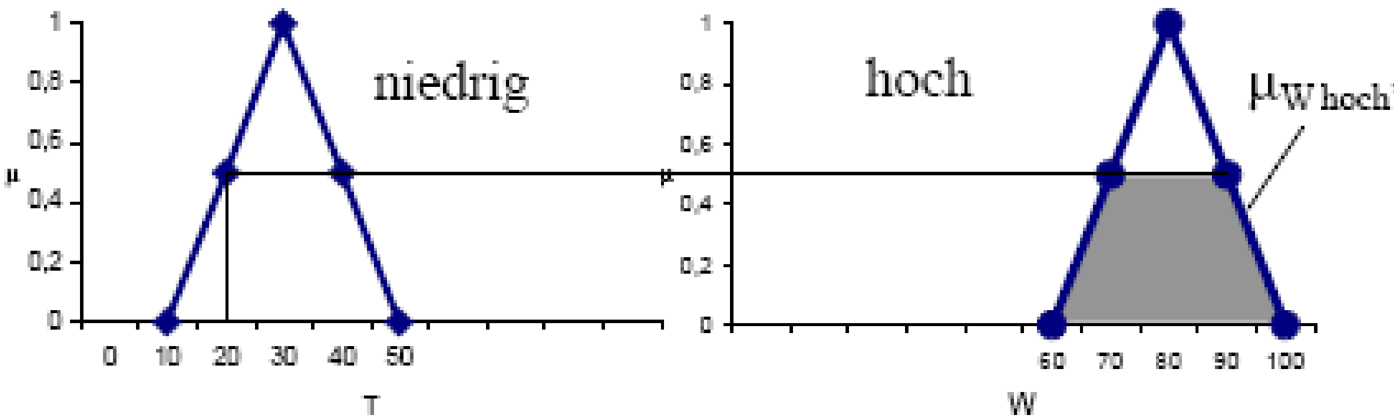
T/W	60	70	80	90	100
10	0	0	0	0	0
20	0	0.5	0.5	0.5	0
30	0	0.5	1	0.5	0
40	0	0.5	0.5	0.5	0
50	0	0	0	0	0

$\mu_{B'}(W) \quad = \mu_{W\,woch'}(W) = (0, 0.5, 0.5, 0.5, 0)$

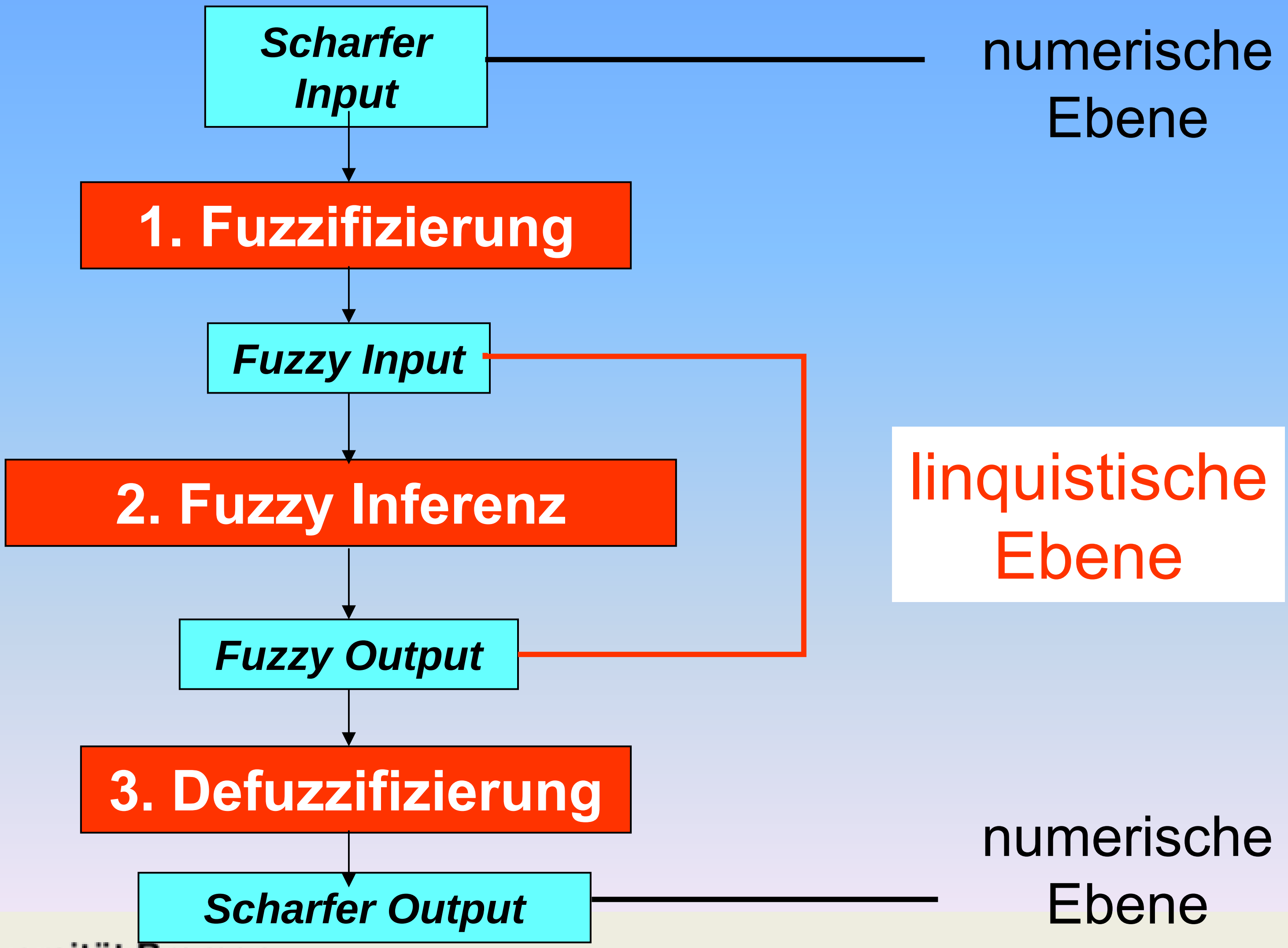
Als Inferenzergebnis erhalten wir die Fuzzy-Menge

$$\begin{aligned}\mu_{W\,hoch'}(W) &= \mu_R(T = 20°C, W)\\ &= MIN(\mu_{W\,niedrig'}(20°C), \mu_{W\,hoch}(W))\end{aligned}$$

Grafische Deutung:
Ergebnis des Inferenzvorgangs ist eine „geköpfte“ Fuzzy-Menge hohe Wärmezufuhr.



Grundlegende Elemente eines Fuzzy Systems



Fuzzifizierung

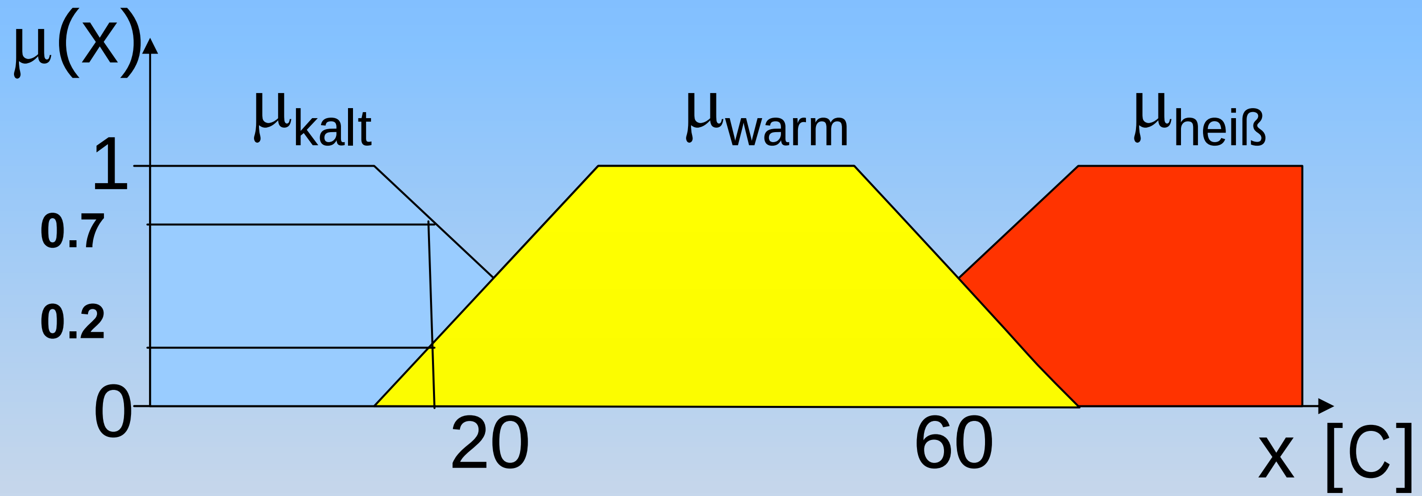
Sei L = (μ_1, μ_2,… μ_n) eine linquistische Variable über der Grundmenge X mit den Fuzzy-Mengen (X, μ_1),…, (X, μ_n).

Definition. Unter **Fuzzifizierung** eines Elementes $x \in X$ bezeichnet man das n-Tupel

$$(\mu_1(x), \mu_2(x), \dots \mu_n(x))$$

Fuzzifizierung

Linguistische Variable : Temperatur
Linguistische Terme (Fuzzy mengen) : { kalt, warm, heiß }



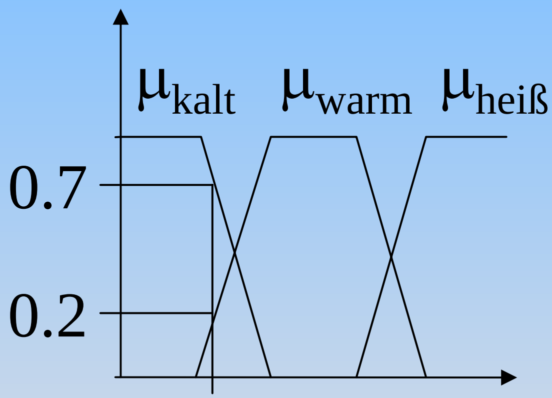
Sei x=18(C)
Fuzzifizierung von x=18

$(\mu_{kalt}(18), \mu_{warm}(18), \mu_{heiß}(18)) = (0.7, 0.2, 0.0)$

Schema einer Fuzzy Entscheidung

Temperatur und Ventil

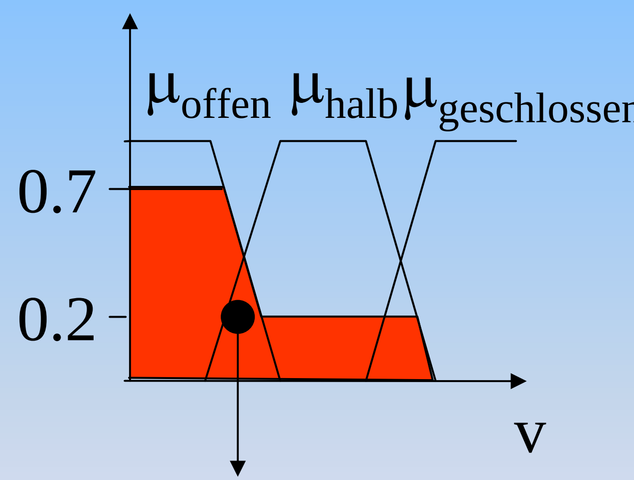
→ Fuzzifizierung → Inferenz → Defuzzifizierung →



gemessene Temperatur

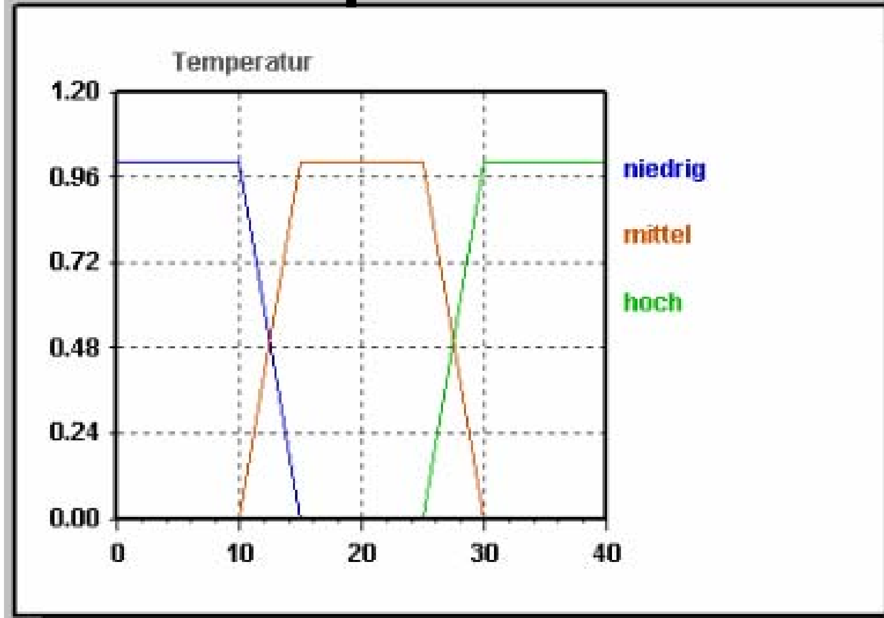
Regel-Basis

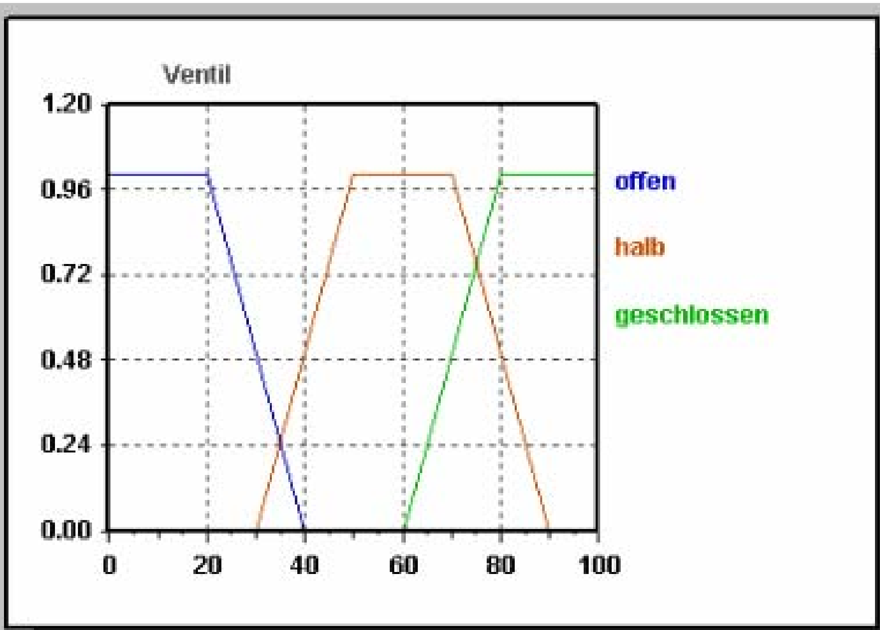
wenn temp kalt, Ventil offen	
	μ_{kalt} =0.7
wenn temp warm, dann ist das Ventil halb	
	μ_{warm} =0.2
wenn temp heiß, dann ist das Ventil geschlossen	
	$\mu_{heiß}$ =0.0



Scharfer Ausgangswert für das Ventil

Beispiel





Regelbasis:

Temperatur = TN => Ventil = OF

Temperatur = TM => Ventil = HA

Temperatur = TH => Ventil = GE

Regelbasis

- **Rule 1**: Wenn x niedrig ist UND y niedrig ist, dann ist z hoch
- **Rule 2**: Wenn x niedrig ist UND y hoch ist, dann ist z niedrig
- **Rule 3**: Wenn x hoch ist UND y niedrig ist, dann ist z niedrig
- **Rule 4**: Wenn x hoch ist UND y hoch ist dann ist z hoch

Inferenz

Ermittlung der aktiven Regeln

- **Rule1**: niedrig(x)=0.68, niedrig(y)=0.39 => hoch(z)=MIN(0.68,0.39)=0.39

  Regelstärke

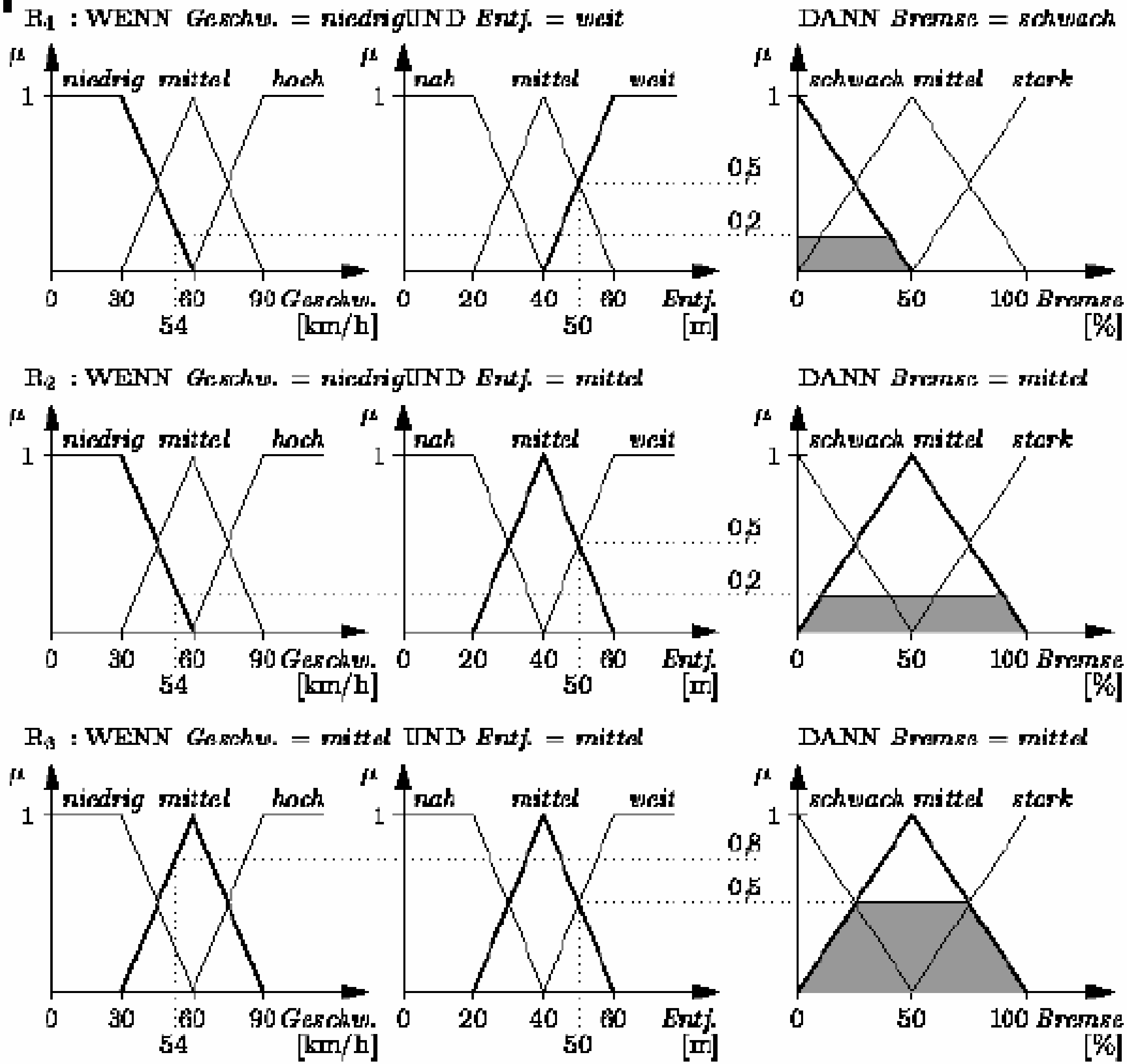
- **Rule2**: niedrig(x)=0.68, hoch(y)=0.61 => niedrig(z)=MIN(0.68,0.61)=0.61

- **Rule3**: hoch(x)=0.32, niedrig(y)=0.39 => niedrig(z)=MIN(0.32,0.39)=0.32

- **Rule4**: hoch(x)=0.32, hoch(y)=0.61 => hoch(z)=MIN(0.32,0.61)=0.32

Beispiel

Abläufe im Fuzzy-System



Fuzzy Logik

Grundbegriffe

Ein formales System der Fuzzy-Logik

Syntax der Fuzzy-Aussagenlogik

1. **Grundzeichen**
   1. Aussagenvariable
   2. Die Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   3. Runde Klammern

2. **Induktive Definition der Formeln** (=zulässige Ausdrücke)
   1. Jede Aussagenvariable ist eine Formel
   2. Sind A und B Formeln, so sind auch (A) und $\neg$A Formeln.
   3. Sind A und B Formeln, so sind (A $\vee$B), (A $\wedge$ B), (A $\rightarrow$ B), (A $\leftrightarrow$ B) Formeln.

Fuzzy-Logik

Semantik der Fuzzy-Aussagenlogik

1. Jede Formel ist eine Fuzzy-Aussageform.
2. Eine Formel A heißt n-stellig, wenn in A n Aussagenvariable $x_1,\ldots,x_n$ vorkommen.
3. Für eine n-stellige Formel $A(x_1,\ldots,x_n)$ berechnet sich der Wahrheitswert bei gegeben Wahrheitswerten $\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n)$ gemäß

$$\delta\big(A(x_1,\ldots,x_n)\big) = A\big(\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n)\big)$$

Fuzzy-Logik

Semantik der Fuzzy-Aussagenlogik

Beispiele

fuzzy-logische Negation „$\neg$“ : $\delta(\neg A) = 1 - \delta(A)$

fuzzy-logische Disjunktion „$\vee$“ : $\delta(A \vee B) = \max(\delta(A), \delta(B))$

fuzzy-logische Konjunktion „$\wedge$“ : $\delta(A \wedge B) = \min(\delta(A), \delta(B))$

fuzzy-logische Subjunktion „$\rightarrow$“ :

$$\delta(a \rightarrow b) = \min(1, 1 + \delta(B) - \delta(A))$$

fuzzy-logische Bijunktion „$\leftrightarrow$“ : $\delta(A \leftrightarrow B) = 1 - |\delta(A) - \delta(B)|$.

Fuzzy-Logik

Aussage:

„Diplom-Mathematiker mit Kenntnissen in Informatik und der Betriebswirtschaftslehre haben gute Berufsaussichten in der Entwicklung und im Management."

Für Diplom-Mathematiker H. werden folgende Bewertungen festgelegt:

B: „H. hat Kenntnisse in Informatik": $\delta(B) = 0.9$
C: „H. hat Kenntnisse in BWL": $\delta(C) = 0.7$
D: „H. hat gute Berufsaussichten in der Entwicklung":
$\delta(D) = 0.8$
E: „H. hat gute Berufsaussichten im Management":
$\delta(E) = 0.4$

Fuzzy-Logik

B: „H. hat Kenntnisse in Informatik“: δ (B) = 0.9
C: „H. hat Kenntnisse in BWL“: δ(C) = 0.7
D: „H. hat gute Berufsaussichten in der Entwicklung“:
δ (D) = 0.8
E: „H. hat gute Berufsaussichten im Management“:
δ (E) = 0.4

Der Wahrheitswert der Aussage ergibt sich dann zu:

$$
\begin{aligned}
\delta(A) &= \delta((B \wedge C) \rightarrow (D \vee E)) \\
&= \min(1, 1 - \delta(B \wedge C) + \delta(D \vee E)) \\
&= \min(1, 1 - \min(\delta(B), \delta(C)) + \max(\delta(D), \delta(C))) \\
&= \min(1, 1 - \min(0.,9, 0.7) + \max(0.8. 0.4)) \\
&= \min(1, 1 - 0.7 + 0.8) \\
&= \min(1, 1.1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Fuzzy-Logik

erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar

Es sei $A\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ **eine n-stellige Formel.**

$A\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ **heißt fuzzy-logisch allgemeingültig**

oder auch eine fuzzy-logische Tautologie,

wenn für jede Belegung

$\left(\delta\left(x_1\right),\ldots,\delta\left(x_n\right)\right)$ **der** $x_1,\ldots,x_n$

gilt:

$$\delta\left(A\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)=1.$$

Fuzzy-Logik

erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar

Es sei $A(x_1, \ldots, x_n)$ **eine n-stellige Formel.**

Es heißt $A(x_1, \ldots, x_n)$ **fuzzy-logisch erfüllbar,**

wenn es wenigstens eine Belegung

$$\left(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\right) \quad \textbf{mit} \quad \delta\left(A(x_1, \ldots, x_n)\right) \neq 0$$

gibt.

Fuzzy-Logik

erfüllbar, allgemeingültig, unerfüllbar

Es sei $A(x_1,\ldots,x_n)$ **eine n-stellige Formel.**

$A(x_1,\ldots,x_n)$ **heißt fuzzy-logisch unerfüllbar,**

wenn für jede Belegung

$$\left(\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n)\right) \quad \delta\left(A(x_1,\ldots,x_n)\right)=0$$

oder anders ausgedrückt ¬A allgemeingültig ist.

Universität Bremen

Fuzzy-Logik

fuzzy-log. Äquivalenz, fuzzy-log. Implikation

Es sei $A(x_1, \ldots, x_n)$ **ein fuzzy-logisch allgemeingültiger Ausdruck,**

also $\delta(A) = 1$ **für jede Belegung** $(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n))$ **.**

Hat $A(x_1, \ldots, x_n)$ **die Form einer Bijunktion zweier zulässiger Ausdrücke B, C, also**

$$A(x_1, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow C(x_1, \ldots, x_n)$$

so kennzeichnet man die fuzzy-logische Tautologie durch das metasprachliche Zeichen „⇔“ und nennt

$$B(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow C(x_1, \ldots, x_n)$$

eine fuzzy-logische Äquivalenz.

Fuzzy-Logik

fuzzy-log. Äquivalenz, fuzzy-log. Implikation

Es sei $A(x_1,\ldots,x_n)$ **ein fuzzy-logisch allgemeingültiger Ausdruck,**

also $\delta(A)=1$ **für jede Belegung** $\left(\delta(x_1),\ldots,\delta(x_n)\right)$ **.**

Hat $A(x_1,\ldots,x_n)$ **die Form einer Subjunktion zweier zulässiger Ausdrücke B, C, also**

$$A(x_1,\ldots,x_n) \equiv B(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow C(x_1,\ldots,x_n)$$

so kennzeichnet man die fuzzy-logische Tautologie durch das metasprachliche Zeichen „ $\Rightarrow$ “ und nennt

$$B(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow C(x_1,\ldots,x_n)$$

eine fuzzy-logische Implikation

Fuzzy-Logik

Kommutativgesetz	$a \wedge b \Leftrightarrow b \wedge a$	$a \vee b \Leftrightarrow b \vee a$
Assoziativgesetz	$a \wedge (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b) \vee c$
Distributivgesetz	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Absortptionsgesetz	$a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a$	$a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$
Idempotenzgesetz	$a \wedge a \Leftrightarrow a$	$a \vee a \Leftrightarrow a$
De Morgan-Gesetz	$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
Neutralelement	$a \wedge 1 \Leftrightarrow a$	$a \vee 0 \Leftrightarrow a$
Faktorelement	$a \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	$a \vee 1 \Leftrightarrow 1$

Fuzzy-Logik

Nachweis der De-Morgan-Gesetze

Zu zeigen ist jeweils die Gleichheit des Wahrheitswertes der linken und rechten Seite:

$$
\begin{aligned}
\delta(\neg a \vee \neg b) &= \max(1 - \delta(a), 1 - \delta(b)) \\
&= 1 - \min(\delta(a), \delta(b)) \\
&= 1 - \delta(a \wedge b) \\
&= \delta(\neg(a \wedge b))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\neg a \wedge \neg b) &= \min(1 - \delta(a), 1 - \delta(b)) \\
&= 1 - \max(\delta(a), \delta(b)) \\
&= 1 - \delta(a \vee b) \\
&= \delta(\neg(a \vee b))
\end{aligned}
$$

Fuzzy-Logik

!! Es existieren nicht übertragbare Gesetze !!

Beispielsweise sind die so genannten Komplementgesetze

$$(((a \wedge \neg a) \Leftrightarrow 0) \text{ und } ((a \vee \neg a \Leftrightarrow 1))$$

in der Fuzzy-Aussagenlogik nicht gültig, wie man direkt an speziellen Belegungen sieht, etwa für $\delta(a) = 0.4$:

$$\delta(a \wedge \neg a) = \min(\delta(a), 1 - \delta(a)) = \min(0.4; 0.6) = 0.4 \neq 0$$

$$\delta(a \vee \neg a) = \max(\delta(a), 1 - \delta(a)) = \max(0.4; 0.6) = 0.6 \neq 1$$