Mathematik 1 für Informatiker

Einführung In die Algebra

Grundbegriffe

12.12.2006

M. B. Wischnewsky

Universität Bremen

Algebraische Strukturen

	Natürliche Zahlen N	Ganze Zahlen Z	Rationale Zahlen Q	Reelle Zahlen R	Komplexe Zahlen C
Monoid*	*	*	*	*	*
Gruppe		*	*	*	*
Ring		*	*	*	*
Körper			*	*	*

* = Halbgruppe

Zahlen/Zahlenbereiche

reelle Zahlen R

rationale Zahlen Q irrationale Zahlen

ganze Zahlen Z gebrochene Zahlen

natürlichen Zahlen N (positive ganze Zahlen (und Null)) negative ganze Zahlen

Natürliche Zahlen

Definition (Peano)
Die natürlichen Zahlen bilden
- eine Menge **N**,
- auf der eine Abbildung ´: **N** → **N** erklärt und
- ein Element $1 \in$ **N** ausgezeichnet ist derart, dass gilt

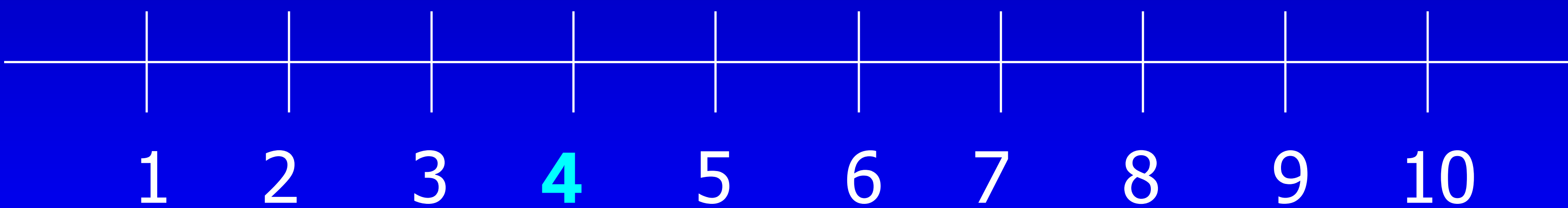
P1 $\forall n \in \mathbf{N}\ (n' \neq 1)$
P2 $\forall\ m, n \in \mathbf{N}\ (m \neq n) \rightarrow (m' \neq n')$
P3 In **N** gilt das Prinzip der **vollständigen Induktion**:
Sei $E \subset \mathbf{N}$. Gilt
(i) $1 \in E$ und (ii) $\forall\ n \in E\ (n \in E) \rightarrow (n' \in E)$,
dann ist $E = \mathbf{N}$.

1 heißt dann Eins, ´ heißt Nachfolgerbildung.

Natürliche Zahlen als Peano - Menge

1, 2, 3, ...

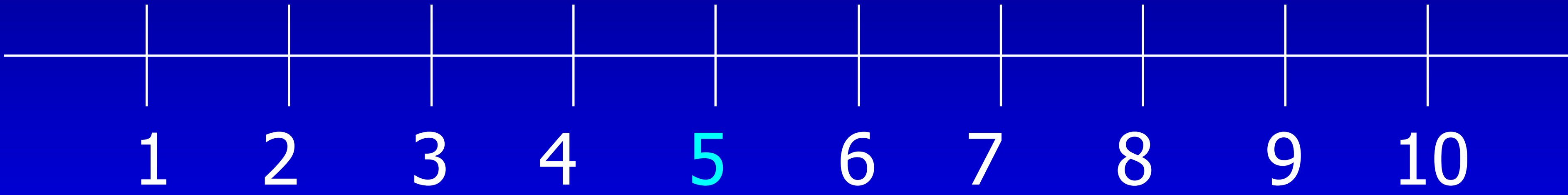
Das Männchen von Giuseppe Peano



Ein Modell für **Peano – Axiome**

Das Männchen von Giuseppe Peano

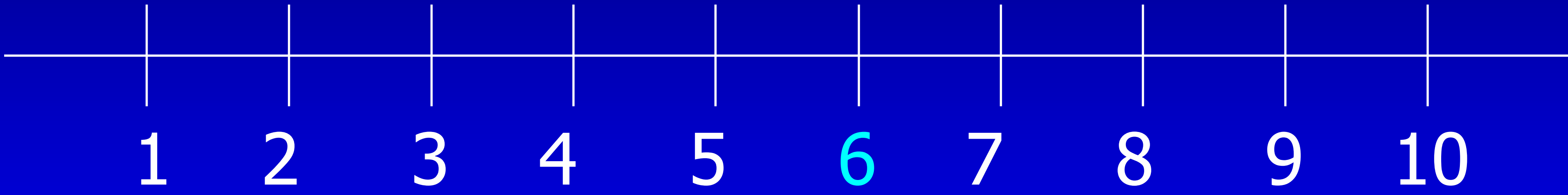
1, 2, 3, ...



- Das Männchen lebt an einer Zahlengerade von den natürlichen Zahlen.
- Es kann nur auf den natürlichen Zahlen vorwärts gehen.
- Es kann einen Schritt nur zur nächsten natürlichen Zahl machen.

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...

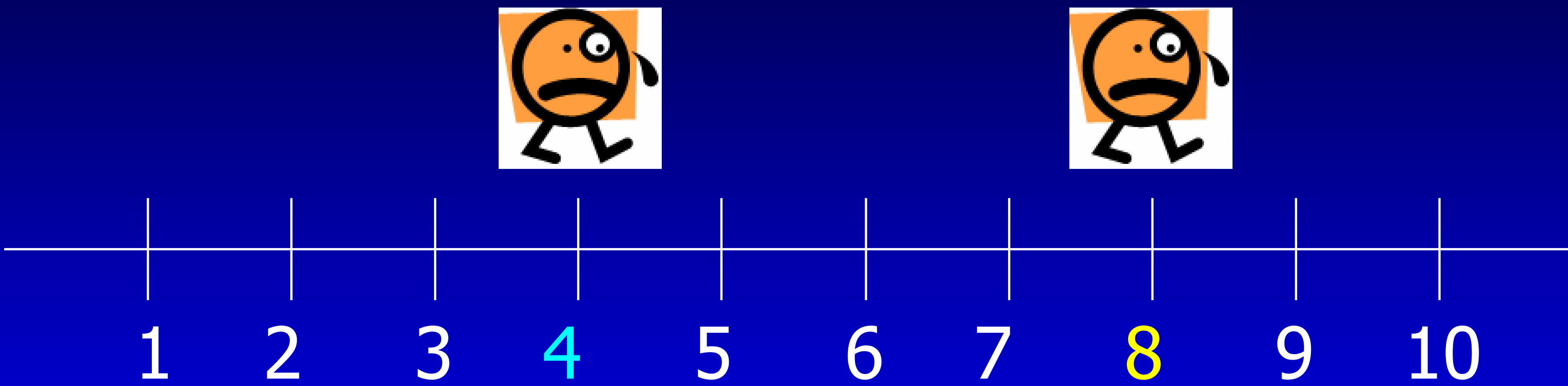


Das Männchen kann immer einen Schritt vorwärts von einer natürlichen Zahl zur nächsten natürlichen Zahl machen.

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge **N**,
auf der eine Abbildung ´: **N** → **N** erklärt
und eine Element 1 ∈ **N** ausgezeichnet ist derart

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...



2 Männchen stehen auf zwei verschiedenen natürlichen Zahlen.

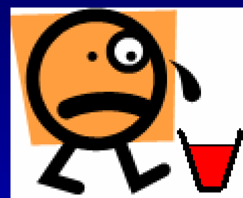
Sie machen einen Schritt vorwärts.

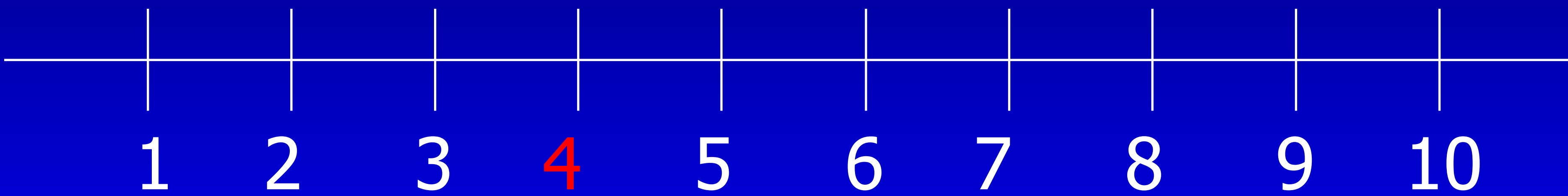
2 Männchen stehen wieder auf zwei verschiedenen natürlichen Zahlen.

Axiom P2: Zwei verschiedene natürliche Zahlen haben auch verschiedene Nachfolger.

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

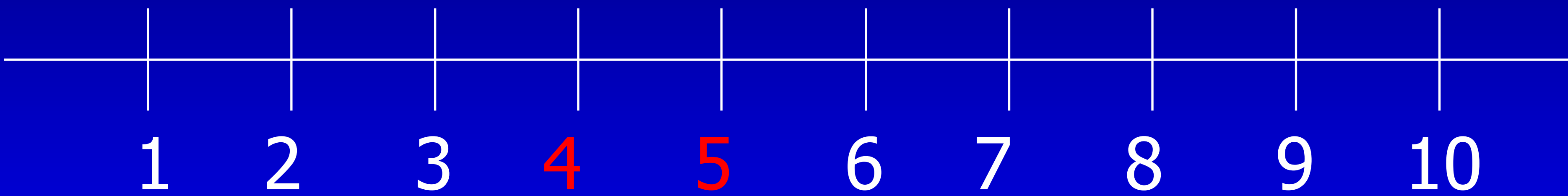
1, 2, 3, ...





Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...



Das Männchen hat einen Topf mit roter Farbe vor sich.

Es steht auf einer natürlichen Zahl.

Es malt diese natürliche Zahl rot an.

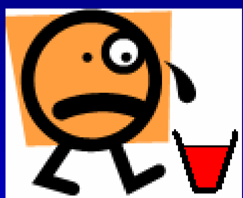
Es macht einen Schritt vorwärts und es steht auf einer natürlichen Zahl.

Es malt diese natürliche Zahl auch rot an.

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...

Regel für Mahlen



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

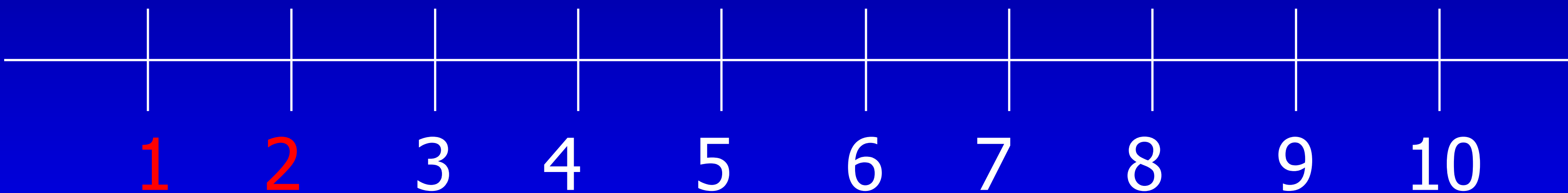
1. Das Männchen steht auf der natürlichen Zahl 1. Es malt diese natürliche Zahl an.

Universität Bremen

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...

Regel für Mahlen



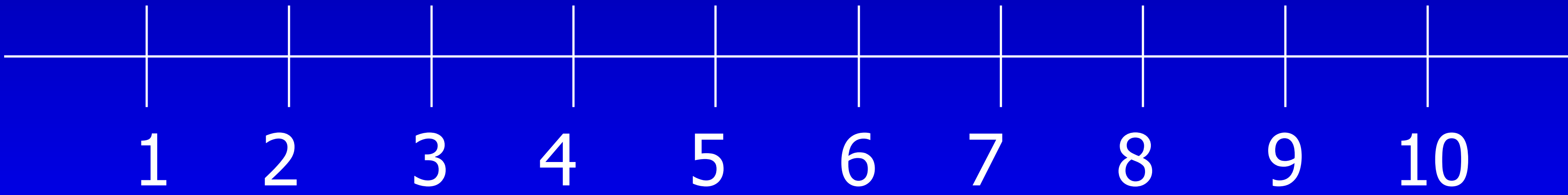
1. Das Männchen steht auf der natürlichen Zahl 1. Es malt diese natürliche Zahl an.

2. Wenn es auf einer natürlichen Zahl steht, macht es einen Schritt vorwärts. Es steht auf einer natürlichen Zahl und es malt diese natürliche Zahl an.

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

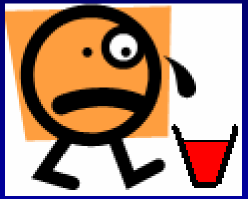


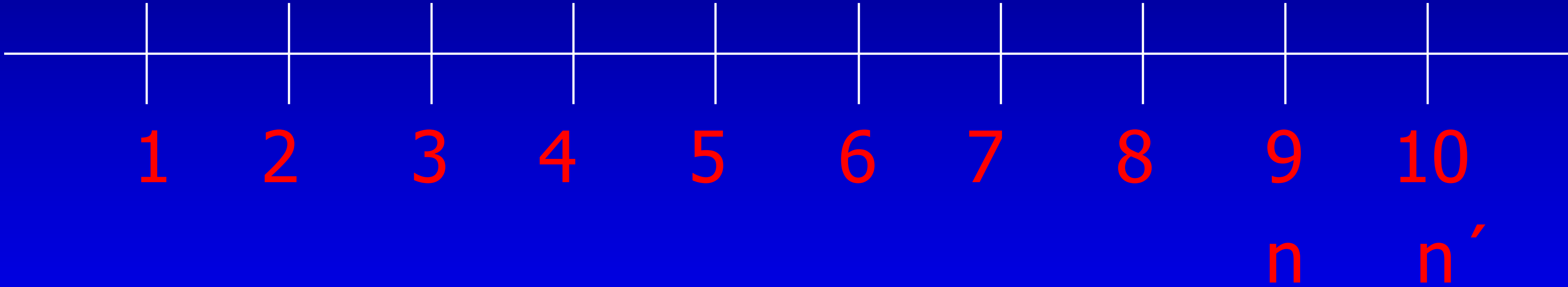
Axiom P3: Eine Menge **E** natürlicher Zahlen,

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion





P3 In **N** gilt das Prinzip der **vollständigen Induktion:**

Sei $E \subset \mathbf{N}$. Gelten

(i) $1 \in E$ und (ii) $\forall\, n \in E\ (n \in E) \rightarrow (n' \in E)$,

dann ist $E = \mathbf{N}$.

Regel für das Männchen und Peano - Axiome

1, 2, 3, ...

Operationen und Anordnungen

Addition:

a) $x + 1 = x'$

b) $x + y' = (x + y)'$

Multiplikation:

a) $x \,.\, 1 = x$

b) $x \,.\, y' = x \,.\, y + x$

Wenn für die natürlichen Zahlen **a, b** gilt: **b = a +x** und **x ist eine natürliche Zahl**, dann gilt auch: **a** < **b**.

Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei A eine Aussage oder eine Eigenschaft, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Wir schreiben auch $A(n)$.

Wenn wir wissen, dass folgendes gilt:

(1) **Induktionsanfang**

Die Aussage A gilt im Fall $n = 1$ (das heißt, es gilt $A(1)$),

(2) **Induktionsschluss:** Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ folgt: Gilt $A(n)$, so gilt die Aussage $A(n+1)$,

dann gilt die Aussage A für alle natürlichen Zahlen.

Prinzip der Vollständigen Induktion

Beweis

Sei $E := \{n \in N;\ A(n) \text{ ist gültig}\}$. Nun gilt

1) $1 \in E$ $\quad\quad$ $(A(1))$

2) Ist $n \in E$, so ist auch $n' \in E$ $\quad\quad$ $(A(n) \rightarrow A(n'))$

Somit gilt $E = N$ (nach Peano-Axiom P3)

Prinzip der Vollständigen Induktion

Sei A eine Aussage oder eine Eigenschaft, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Wir schreiben auch $A(n)$.

Wenn wir wissen, dass folgendes gilt:

(1) **Induktionsanfang**

Die Aussage A gilt im Fall $n = 1$ (das heißt, es gilt $A(1)$),

(2) **Induktionsschluss:** Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ folgt: Gilt $A(n)$, so gilt die Aussage $A(n+1)$,

dann gilt die Aussage A für alle natürlichen Zahlen.

Prinzip der Vollständigen Induktion

Beweis

Sei $E := \{n \in N;\ A(n) \text{ ist gültig}\}$. Nun gilt

1) $1 \in E$ $\quad (A(1))$

2) Ist $n \in E$, so ist auch $n' \in E$ $\quad (A(n) \rightarrow A(n'))$

Somit gilt E = N (nach Peano-Axiom P3)

Erläuterung

Bedeutung der vollständigen Induktion:

Um eine Aussage für alle natürlichen Zahlen (also über unendlich viele Objekte!) nachzuweisen, muss man nur zwei Aussagen beweisen:

Induktionsanfang: **A(1)**

Induktionsschluss: **$A(n) \Rightarrow A(n+1)$**

A(n) heißt Induktionsannahme:

Die hinter diesem Prinzip stehende “Philosophie” ist die, dass man in objektiv kontrollierbarer Weise über eine Unendlichkeit (“alle” natürlichen Zahlen) sprechen kann.

Schema der vollständigen Induktion

$\forall n \in \mathbb{N}\,(A(n))$	Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N}\,(3 \mid n^3 + 2n)$	Induktionssatz
$A(1)$	*Induktionsanfang:* $3 \mid 1^3 + 2 \cdot 1$	$1 \in E$
	Induktionsschritt:	
$A(k)$	Induktionsannahme $3 \mid k^3 + 2k$	$k \in E$
$A(k+1)$	Induktionsbehauptung $3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$	$k+1 \in E$
$A(k) \Rightarrow A(k+1)$	Induktionsschluss Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme : $(k+1)^3+2(k+1) = k^3+2k+3(k^2+k+1)$ Es gilt $3 \mid k^3 + 2k$ (Induktionsannahme) und $3 \mid 3(k^2 + k + 1)$, also $3 \mid (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$, d.h. $3 \mid (k+1)^3 + 2(k+1)$.	$k \in E \Rightarrow k+1 \in E$

Anwendung: Summe der ersten n Zahlen

Problem **(C.F. Gauß): 1+2+3 +...+ 100 = ???**

Satz. ***Für jede natürliche Zahl*** **$n \geq 1$** ***gilt:***

$1+2+\ldots + n = n(n+1)/2$.

In Worten: Die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen ist gleich $(n+1)n/2$.

Konsequenz: Man kann die Summe $1+2+3+\ldots+n$ ganz einfach ausrechnen, und es passieren kaum Rechenfehler.

Beweis durch vollständige Induktion

Beweis **durch Induktion nach n.**

Die Aussage $A(n)$ sei die Aussage des Satzes, also:

$$A(n): 1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2.$$

Sowohl bei der Induktionsbasis als auch beim Induktionsschritt zeigen wir, dass in der entsprechenden Gleichung links und rechts das Gleiche steht.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann steht auf der linken Seite nur der Summand 1, und auf der rechten Seite steht $2 \cdot 1/2$, also ebenfalls 1. Also gilt $A(1)$

Induktionsschritt

Induktionsschluss: Sei n eine natürliche Zahl ≥ 1, und sei die Aussage richtig für n. Wir müssen $A(n+1)$ beweisen, das heißt, die Summe $1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1)$ berechnen.

Wir spalten wir diese Summe auf:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1)} \\
&\qquad \mathbf{= [1+2+3+\ldots+(n-1)+n]+(n+1)} \\
&\qquad \mathbf{= n(n+1)/2+(n+1)} \quad \textbf{(nach Induktion)} \\
&\qquad \mathbf{= [n(n+1)+2(n+1)]/2 = (n+2)(n+1)/2.}
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir die Aussage $A(n+1)$ bewiesen.

Somit gilt der Satz. □

Anwendung: Summe der ungeraden Zahlen

Satz. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$1+3+5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

In Worten: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich der n-ten Quadratzahl.

Beispiele:

(a) $1 + 3 + 5 = 9$

(b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 1999 = 1.000.000$

Beweis mit vollständiger Induktion

Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann steht auf der linken Seite nur der Summand 1, und auf der rechten Seite steht $1^2 = 1$. Somit gilt $A(1)$.

Induktionsschluss: Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, und es gelte $A(n)$. Wir müssen $A(n+1)$ nachweisen.

Wir beginnen mit der linken Seite von $A(n+1)$ und formen diese so lange um, bis wir die rechte Seite von $A(n+1)$ erhalten:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) &= [1+3+5+\ldots+(2n-1)]+(2n+1) \\ &= n^2+(2n+1) \qquad \text{(nach Induktion)} \\ &= n^2+2n+1=(n+1)^2\,. \end{aligned}$$

Somit gilt $A(n+1)$, und damit ist die Aussage bewiesen. □

Zahlen/Zahlenbereiche

DARSTELLUNG DER ZAHLEN

Unterscheidung zwischen Zahl und Symbol:

z.B. fünf = 5, V, o, 101

Additive Darstellung

CXVIII = hundert + zehn + fünf + eins + eins + eins

wurde in den alten römischen, ägyptischen, griechischen und hebräischen Zahlsystemen verwendet.

Nachteil:

- Man benötigt viele Symbole.
- Rechnen ist sehr schwierig.

Zahlen/Zahlenbereiche

Das verbreitetste Stellensystem ist das

Dezimalsystem:

$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0$

oder symbolisch $a_n a_{n-1} .. a_1 a_0.$

mit $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

z.B. $372 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1$

372 : 10 = 37 Rest **2**

37 : 10 = 3Rest **7**

3 : 10 = 0Rest **3** $\Rightarrow$ 372

Zahlen/Zahlenbereiche

Septimalsystem:

$z = b_n \cdot 7^n + b_{n-1} \cdot 7^{n-1} + ... + b_1 \cdot 7 + b_0 \cdot 7^0$

mit $b_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Hundertneun im Septimalsystem wird durch das Symbol 214 ausgedrückt:

$2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 4$

109 : 7 = 15 Rest 4

15 : 7 = 2 Rest 1

2 : 7 = 0 Rest 2 $\Rightarrow$ 214

109 (Dezimalsystem) =

214 (Septimalsystem)

Zahlen/Zahlenbereiche

Dualsystem:

$z = c_n \cdot 2^n + c_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 2 + c_0 \cdot 2^0$

mit $c_i \in \{0, 1\}$

Neunundsiebzig $= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$
$= 1001111$

79 : 2 = 39	Rest 1
39 : 2 = 19	Rest 1
19 : 2 = 9	Rest 1
9 : 2 = 4	Rest 1
4 : 2 = 2	Rest 0
2 : 2 = 1	Rest 0
1 : 2 = 0	Rest 1 $\Rightarrow$ 1001111

Darstellung von natürlichen Zahlen

Satz Jede natürliche Zahl n besitzt zur Basis d ≥ 2 (d ∈ N) eine eindeutige d-adische Darstellung der Form

$$n = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \cdot d^i \text{ mit } 0 \le \alpha_i < d$$

$$2003_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

- Im Rechner üblich: Binärzahlen d=2

$$1110_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8_{10} + 4_{10} + 2_{10} = 14_{10}$$

– Hexadezimal: d=16 oder Oktal: d=8

Die ganzen Zahlen

Die natürlichen Zahlen **N** sind abgeschlossen bzgl. Summenbildung.
d.h. für je zwei natürliche Zahlen n, m ist auch die Summe n + m immer eine natürliche Zahl.

Die Differenz zweier natürlicher Zahlen muß jedoch keine natürliche Zahl sein (z.B. $3 - 5 \notin \mathbf{N}$). Um eine Menge zu erhalten, die auch bzgl. Differenzbildung abgeschlossen ist, müssen wir **N** erweitern.

Wir definieren die Menge der **ganzen Zahlen** wie folgt:

$$\mathbf{Z} := \mathbf{N} \cup \{ -n \mid n \in \mathbf{N} \}.$$

Dabei ist -n das bzgl. der Addition inverse Element („negatives Element“) von n, d.h. es gilt $-n + n = 0$.

Rechengesetze in Z

Um mit den ganzen Zahlen rechnen zu können, müssen wir auf der Menge **Z** noch Rechenregeln definieren.

Wir definieren (wie üblich) für n, m $\in$ **N**:

$$(-n) + (-m) = -(n + m)$$

$$(-n) \cdot (-m) = n \cdot m$$

usw.

Warum definieren wir die Rechenregeln gerade so?

Mit diesen Regeln gelten die üblichen Gesetze (Beweis als Übung):
Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, ...

Wie viele ganze Zahlen gibt es?

Klar: Es gibt unendlich viele ganze Zahlen. Denn schon **N** enthält unendliche viele Zahlen.

Nicht ganz so klar: Gibt es „mehr“ ganze als natürliche Zahlen?

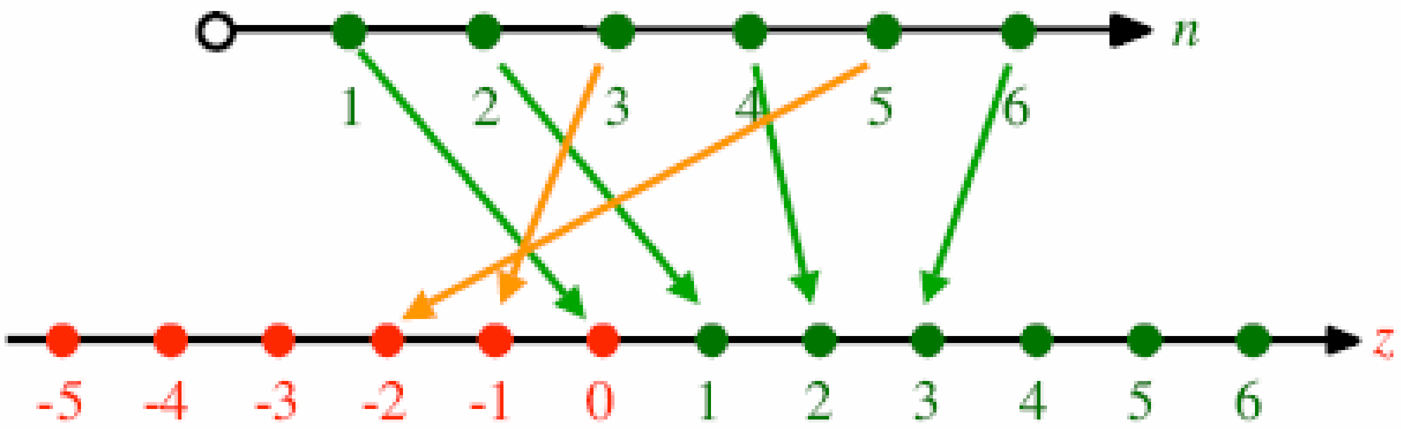
1. Antwort: Ja, denn **N** ist eine echte Teilmenge von **Z**.

2. Antwort: Nein, denn die Mengen **N** und **Z** sind „gleichmächtig“.

Definition. Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt.

Wie könnte diese bijektive Abbildung von **N** nach **Z** aussehen?

Natürliche Zahlen und ganze Zahlen



Gibt es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen?

Argumente pro: Doppelt so viele, und die Null

Argumente contra: Siehe Pfeile

N und Z sind gleichmächtig

Satz. Die Mengen **N** und **Z** sind gleichmächtig.

Beweis. Wir definieren eine Abbildung f von **N** nach **Z** wie folgt:

f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, f(4) = 2, f(5) = -2, f(6) = 3, f(7) = -3, ...

$$f(n) := \begin{cases} -(n-1)/2 & \text{falls n ungerade} \\ n/2 & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

f ist bijektiv, da gilt

f ist surjektiv: z>0: n=2z

z<0: n=-2z+1

z=0: n=1

f ist injektiv: f(m)=f(n) → n=m

Abzählbarkeit

Definition. Eine Menge, die gleichmächtig zu **N** ist, heißt **abzählbar**.

Mit anderen Worten: Abzählbare Mengen kann man mit den natürlichen Zahlen numerieren.

Folgerung. Die Menge **Z** der ganzen Zahlen ist abzählbar.

Eigenschaften der ganzen Zahlen

Seien a und b ganze Zahlen.

Wir sagen "a **teilt** b" (geschrieben $a \mid b$), falls es eine ganze Zahl z gibt mit $b = z \cdot a$.

Man nennt a einen **Teiler** von b, und b ein **Vielfaches** von a.

Beispiele. Es gelten die folgenden Aussagen:

$$2 \mid 10, \quad -3 \mid 21, \quad 8 \mid -16, \quad -15 \mid -135, \quad 2000 \mid 0.$$

Division mit Rest

Division mit Rest. *Seien* a *und* b *ganze Zahlen* ($b \neq 0$). *Dann gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen* q *und* r *mit*

$$a = bq + r \quad \textit{und} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Beispiele.

$a = 13, b = 4 \Rightarrow 13 = 4 \cdot 3 + 1 \ (q = 3, r = 1)$

$a = -13, b = 4 \Rightarrow -13 = 4 \cdot -4 + 3 \ (q = -4, r = 3)$

$a = 13, b = -4 \Rightarrow 13 = -4 \cdot -3 + 1 \ (q = -3, r = 1)$

$a = -13, b = -4 \Rightarrow -13 = -4 \cdot 4 + 3 \ (q = 4, r = 3)$.

Bemerkung: Die Eindeutigkeit kommt erst durch *beide* Eigenschaften ($a = bq + r$ *und* $0 \leq r \leq b-1$) zustande.