

Kontextfreie Grammatiken und Sprachen

Kontextfreie Grammatik: $G = (N, T, P, S)$ mit

- N : Menge nichtterminaler Zeichen,
- T : Menge terminaler Zeichen mit $N \cap T = \emptyset$,
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$: endliche Menge kontextfreier Produktionen
- $S \in N$: Startsymbol

► Schreibweise für Produktionen $(A, u) \in P$: $A ::= u$

► Abkürzung für $A ::= u_1, A ::= u_2, \dots, A ::= u_k$:

$$A ::= u_1 | u_2 | \dots | u_k$$

Beispiel

$$G_{\text{bracket}_0} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$$

Ableitungen

Direkte Ableitung:

$$w = xAy \xrightarrow[p]{} xuy = w'$$

mit $w, w', x, y, u, v \in (N \cup T)^*$, $p = (A ::= u)$.

- **Schreibweise:** $w \xrightarrow[P]{} w'$,
falls P eine Menge von Produktionen ist mit $p \in P$.
- **Beispiel:** $aSb \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^2Sb^2$

Ableitung (Iteration direkter Ableitungen)

$$w_0 \xrightarrow[p_1]{} w_1 \xrightarrow[p_2]{} \cdots \xrightarrow[p_n]{} w_n$$

für $w_0, \dots, w_n \in (N \cup T)^*$ und Produktionen p_1, \dots, p_n
($n \geq 1$)

Schreibweisen:

- $w_0 \xrightarrow[P]{} \cdots \xrightarrow[P]{} w_n$ oder $w_0 \xrightarrow[n]{P} w_n$ oder $w_0 \xrightarrow[*]{P} w_n$,
falls $p_1, \dots, p_n \in P$.
- $w \xrightarrow[*]{} w'$, falls P aus dem Kontext klar ist.

Beispiel

$$G_{\text{bracket}_0} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$$

$$\begin{array}{ccccccc} S & \longrightarrow & aSb & \longrightarrow & a^2Sb^2 & \longrightarrow & a^3Sb^3 & \longrightarrow & a^3b^3 \\ S ::= aSb & & S ::= aSb & & S ::= aSb & & S ::= \lambda & & \end{array}$$

Nullableitung

$$w \xrightarrow[P]{0} w$$

für alle $w \in (N \cup T)^*$.

Erzeugte Sprache

- $G = (N, T, P, S)$: kontextfreie Grammatik

Erzeugte Sprache

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \xrightarrow[P]{*} w\}$$

Beispiel

$$\blacktriangleright G_{\text{bracket}_0} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$$

$$\begin{array}{l}
 S \xrightarrow[S ::= \lambda]{} \lambda, \quad S \xrightarrow[S ::= aSb]{} aSb \xrightarrow[S ::= \lambda]{} ab \\
 S \xrightarrow[S ::= aSb]{} aSb \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^2Sb^2 \xrightarrow[S ::= \lambda]{} a^2b^2 \\
 S \xrightarrow[S ::= aSb]{} aSb \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^2Sb^2 \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^3Sb^3 \xrightarrow[S ::= \lambda]{} a^3b^3 \\
 \dots \\
 S \xrightarrow[S ::= aSb]{} aSb \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^2Sb^2 \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^3Sb^3 \xrightarrow[S ::= aSb]{} \dots \xrightarrow[S ::= \lambda]{} a^n b^n
 \end{array}$$

$$\blacktriangleright L(G_{\text{bracket}_0}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Kontextfreiheitslemma

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $u \xrightarrow[n]{P} v$ eine Ableitung der Länge n und $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ eine Zerlegung von u in k Teilwörter.

Dann gibt es k Ableitungen $u_i \xrightarrow[n_i]{P} v_i$, so dass $v = v_1 \cdots v_k$

und $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Fragestellungen

- ▶ Sind kfG's kompositional?
- ▶ Wie hängen endliche Automaten und kfG's zusammen?
- ▶ Ist für kfG's das Wortproblem schnell lösbar?
- ▶ Was können kfG's nicht?

Vereinigung

Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$, $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kfG's mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Vereinigung

$$G_1 + G_2 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_{\text{neu}}\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S_{\text{neu}} ::= S_1 \mid S_2\}, S_{\text{neu}})$$

Satz

$$L(G_1 + G_2) = L(G_1) \cup L(G_2).$$

Konkatenation

Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$, $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kfG's mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Konkatenation

$$G_1 \circ G_2 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_{\text{neu}}\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S_{\text{neu}} ::= S_1 S_2\}, S_{\text{neu}})$$

Satz

$$L(G_1 \circ G_2) = L(G_1)L(G_2).$$

Kleene Hülle

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kfG.

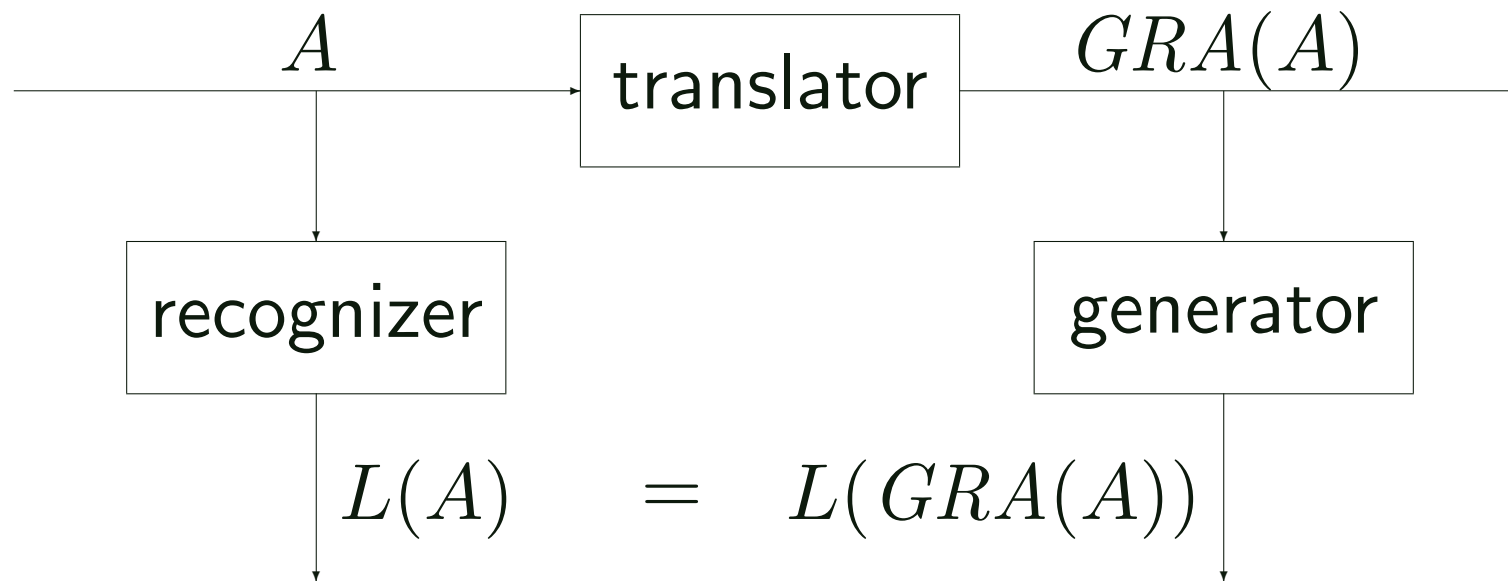
Kleene Hülle

$$G_* = (N \cup \{S_{\text{neu}}\}, T, P \cup \{S_{\text{neu}} ::= \lambda \mid SS_{\text{neu}}\}, S_{\text{neu}})$$

Satz

$$L(G_*) = L(G)^*.$$

Übersetzung endlicher Automaten in (rechtslineare) Grammatiken



Übersetzung (2)

Sei $A = (Z, I, d, s_0, F)$ ein NEA.

GRA(A)

$GRA(A) = (Z, I, P_A, s_0)$ mit

$$P_A = \{s ::= xs' \mid s' \in d(s, x)\} \cup \{s'' ::= \lambda \mid s'' \in F\}$$

Satz

$$L(A) = L(GRA(A)).$$