

# Zusammenhang zwischen Kellerautomaten und kontextfreien Sprachen

Für jede kontextfreie Grammatik  $G$  gibt es einen Kellerautomaten  $K$ , so dass  $L(G) = L(K)$ .

Für jeden Kellerautomaten  $K$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G$ , so dass  $L(K) = L(G)$ . (Ohne Beweis)

# Folgerung

$$\mathcal{L}_{NKA} = \mathcal{L}_{KFS}.$$

- ▶  $\mathcal{L}_{NKA}$ : Klasse aller von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen
- ▶  $\mathcal{L}_{KFS}$ : Klasse der kontextfreien Sprachen

# Ein paar Umformungen kontextfreier Grammatiken

- ▶ Nützlich für den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.
- ▶ Nützlich für die Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.

# Eliminierung von $\lambda$ -Produktionen

Eine Produktion der Form

$$A ::= \lambda$$

heißt  $\lambda$ -Produktion.

## Satz

Für jede kontextfreie Grammatik  $G$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G_{\lambda\text{-frei}}$  ohne  $\lambda$ -Produktionen, so dass

$$L(G) = L(G_{\lambda\text{-frei}}) - \{\lambda\}.$$

## Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

1. Sammeln aller  $A \in N$  mit  $A \xrightarrow{*} \lambda$ :

- ▶ Alle  $A \in N$ , aus denen  $\lambda$  direkt ableitbar ist:

$$M_0 = \{A, B\}$$

- ▶ Hinzufügung aller  $A \in N$ , deren rechte Seiten nur aus Zeichen aus  $M_0$  zusammengesetzt sind:

$$M_1 = M_0 \cup \{S\} = \{A, B, S\}$$

## Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

- 
- ▶ Hinzufügung aller  $A \in N$ , deren rechte Seiten nur aus Zeichen aus  $M_1$  zusammengesetzt sind:

$$M_2 = M_1 \cup \emptyset = \{A, B, S\}$$

- ▶ Alle  $A \in N$ , aus denen  $\lambda$  in beliebig vielen Schritten ableitbar ist:

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cdots = \{A, B, S\}$$

# Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

2. Sukzessives Erweitern der Regelmenge durch Streichen der Zeichen  $A \in M = \{A, B, S\}$  aus den rechten Regelseiten:

►  $P_0 = \{S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda\}$

►  $P_1 = P_0 \cup \{S ::= A|B, A ::= aA, B ::= bB\}$

►  $P_2 = P_1 \cup \{S ::= \lambda, A ::= a, B ::= b\}$

►  $P_2 = P_2 \cup \emptyset = P_2$

►  $P' = P_2 = \{S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda\}$

### 3. Löschen aller $\lambda$ -Produktionen aus $P'$ :

Aus

$$\{S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda\}$$

erhalten wir

$$P_{\lambda\text{-frei}} = \{S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|a, B ::= bBB|bB|b\}.$$



# Konstruktion

Sei  $G = (N, T, P, S)$  eine kfG.

1. (Sammeln aller  $A \in N$  mit  $A \xrightarrow{*} \lambda$ .)

- $M_0 = \{A \in N \mid A ::= \lambda\}$
- $M_{i+1} = M_i \cup \{A \in N \mid A ::= w \in P, w \in M_i^*\}$
- $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$

$$M' = \{A \in N \mid A ::= \lambda\}$$

repeat

$$M := M';$$

$$M' := M \cup \{A \in N \mid A ::= w \in P, w \in M^*\}$$

until  $M' = M$

## 2. (Konstruktion von $P_{\lambda\text{-frei}}$ )

- $P_0 = P$
- $P_{i+1} = P_i \cup \{A ::= u_1 u_2 \mid A ::= u_1 B u_2 \in P_i, B \in M\}$
- $P' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$
- $P_{\lambda\text{-frei}} = P' - \{p \in P' \mid p = A ::= \lambda\}$

## 3. (Konstruktion von $G_{\lambda\text{-frei}}$ )

$$G_{\lambda\text{-frei}} = (N, T, P_{\lambda\text{-frei}}, S)$$

# Eliminierung von Kettenregeln

Eine Produktion der Form  $A ::= B$  mit  $B \in N$  heißt **Kettenregel**.

## Satz

Für jede kontextfreie Grammatik  $G$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G_{KR-frei}$  ohne Kettenregeln, so dass

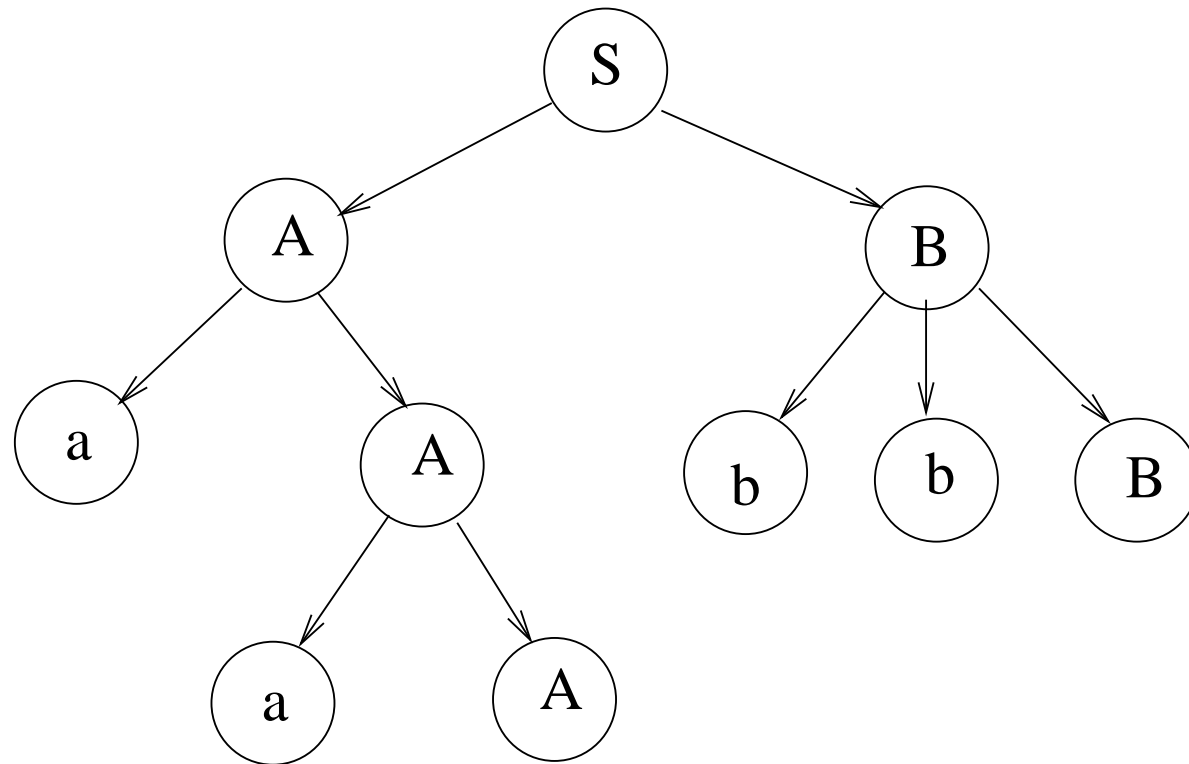
$$L(G) = L(G_{KR-frei}).$$

# Ableitungsbäume

- ▶ Veranschaulichen Ableitungen kontextfreier Grammatiken
- ▶ Nützlich für den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen
- ▶ Konstruktion beruht auf dem Kontextfreiheitslemma
- ▶ Ermöglichen die Nutzung bekannter Baumeigenschaften für die Analyse von Ableitungen
- ▶ Spielen eine wichtige Rolle im Compilerbau

# Baumdarstellung von Ableitungen

►  $S \rightarrow AB \rightarrow aAB \rightarrow a^2AB \rightarrow a^2AbbB$



## Definition

- ▶ Sei  $G = (N, T, P, S)$  eine kontextfreie Grammatik ohne  $\lambda$ -Produktionen.
- ▶ Sei  $X \xrightarrow[P]{n} w$  mit  $X \in N \cup T$ .

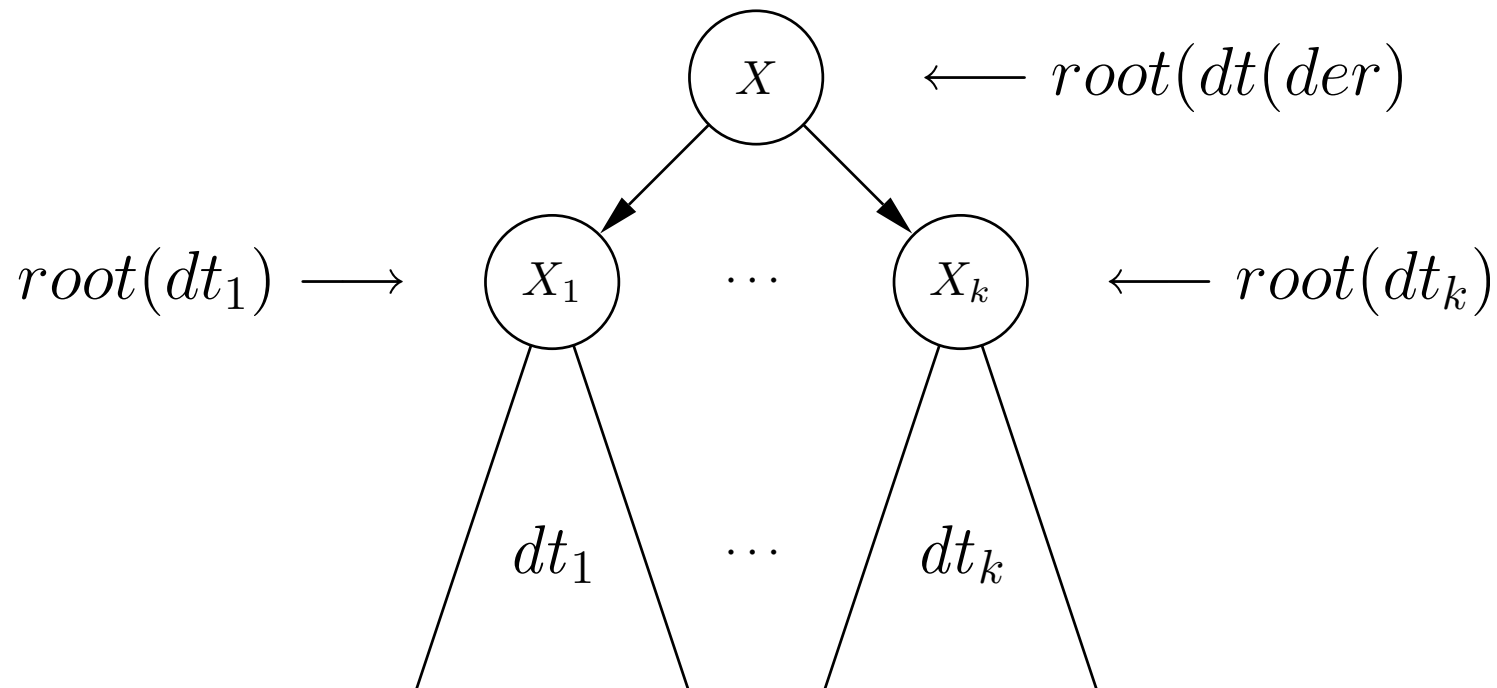
Dann ist der **Ableitungsbaum**  $dt(X \xrightarrow[P]{*} w)$  rekursiv wie folgt definiert:

1.  $dt(X \xrightarrow[P]{0} X)$ :

$$\bigcirc_X \longleftarrow \text{root}\left(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)\right)$$

►  $height(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)) = 0$  und  $res(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)) = X$

2. Sei  $der : X \xrightarrow[P]{\quad} X_1 \dots X_k \xrightarrow[n]{\quad} w$ . Seien  $X_i \xrightarrow[P]{n_i} w_i$  ( $n_i \leq n$ ) die korrespondierenden Ableitungen gemäß dem Kontextfreiheitslemma. Sei  $dt_i = dt(X_i \xrightarrow[P]{n_i} w_i)$ . Dann hat der Ableitungsbaum  $dt(der)$  die Form





- ▶  $height(dt(der)) = 1 + \max\{height(dt_i) \mid i = 1, \dots, k\}$
- ▶  $res(dt(der)) = U = res(dt_1) \cdots res(dt_k).$

# Beziehung zwischen Baumhöhe und Resultatslänge

## Beobachtung 1

Sei  $b$  die Länge der längsten rechten Seite von Produktionen aus  $P$ . Dann gilt für alle Ableitungsbäume  $dt$ :

$$\text{length}(\text{res}(dt)) \leq b^{\text{height}(dt)}.$$

# Ein langer Weg von der Wurzel zu einem Blatt

## Beobachtung 2

In jedem Ableitungsbaum gibt es mindestens einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt, der so lang ist, wie der Baum hoch ist.

# Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zu jeder kontextfreien Sprache  $L$  existiert ein  $p \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

Ist  $z \in L$  mit  $\text{length}(z) \geq p$ , dann lässt sich  $z$  schreiben als  $z = uvwxy$ , wobei  $\text{length}(vwx) \leq p$  ist und  $vx \neq \lambda$ , und für alle  $i \in \mathbb{N}$  gilt:

$$uv^iwx^iy \in L.$$