

Macht Mathematik Risiken beherrschbar?

BGW – Seminar von Max Plagemann

Zum Vortrag von Dr. Artur Klinger

anlässlich der

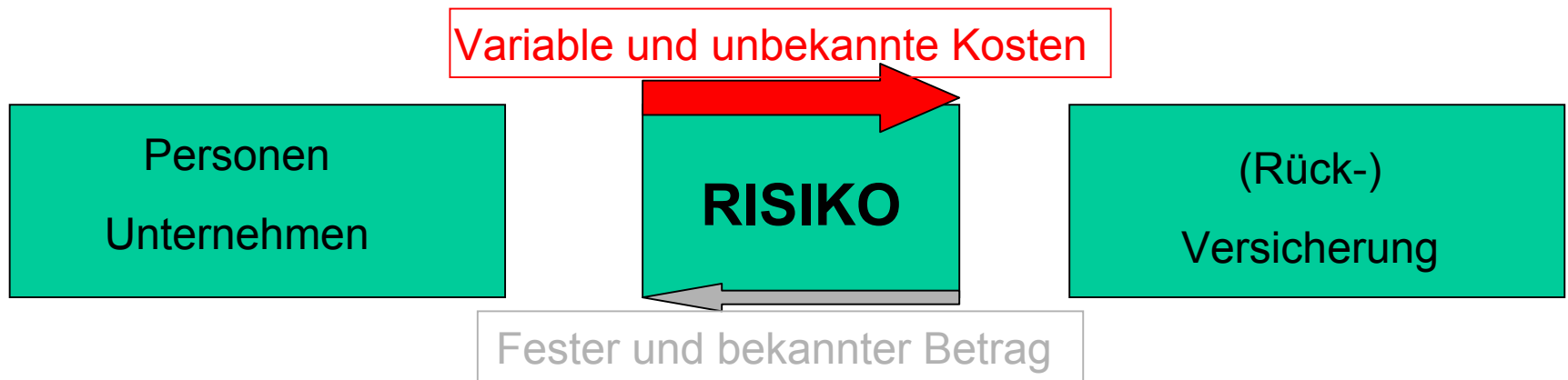
18. Bremer Universitäts - Gespräche im November
2005

AGENDA

1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.
2. Preisfindung bei Groß-Risiken durch Marktprinzipien:
Lloyd
3. Preisfindung bei Groß-Risiken mit Hilfe von Modellen:
Der Kapitalmarkt
4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation
5. Grundzüge der Extremwertstatistik
6. Outlook

1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.

- Prinzip der Versicherung als Tauschgeschäft.



- Die Versicherung als Institution tauscht eine monetäre Unsicherheit gegen einen fixen Betrag, die „Risikoprämie“.

1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.

- Erst die Versicherbarkeit von Risiken motiviert „grössere Geschäftsrisiken“ einzugehen.
- Versicherung ist ein Kennzeichen wirtschaftlicher Entwicklung. (Bsp. „just in time Produktion“)
- Rückversicherung ist Voraussetzung für die Bereitstellung ausreichender Kapazitäten.
- Wertschöpfung ist abhängig von der Fähigkeit, dass

**Risiko in eine feste Prämie umzuwandeln
= Preisfindung**

1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.

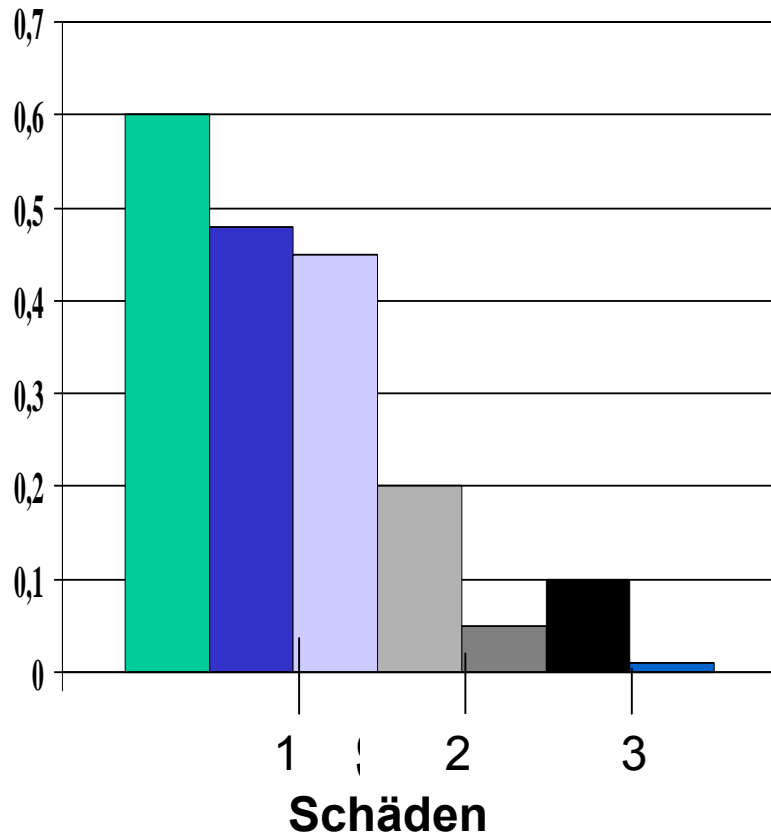
- „Risikotransfer“
- Wie lässt sich das Risiko eines Einzelnen durch Portefeuille-Betrachtung in fixe Kosten eines Kollektives umwandeln und wieder auf den Einzelnen zuteilen?
- Mathematische Hilfe:

Das Gesetz der großen Zahlen

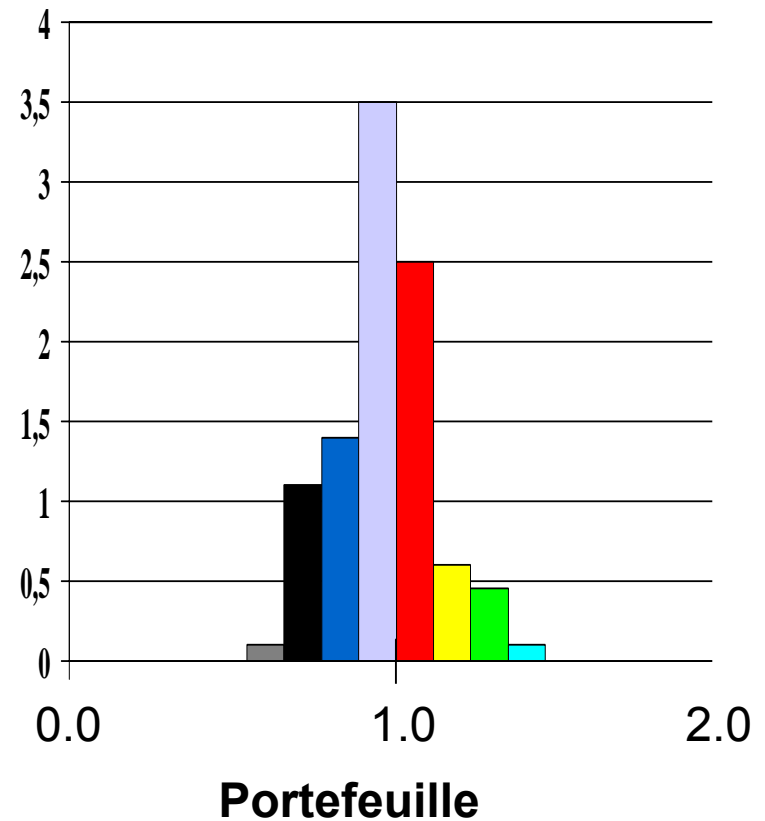
„Die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses nähert sich immer weiter an die theoretische Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis (Erwartungswert) an, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.“

1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.

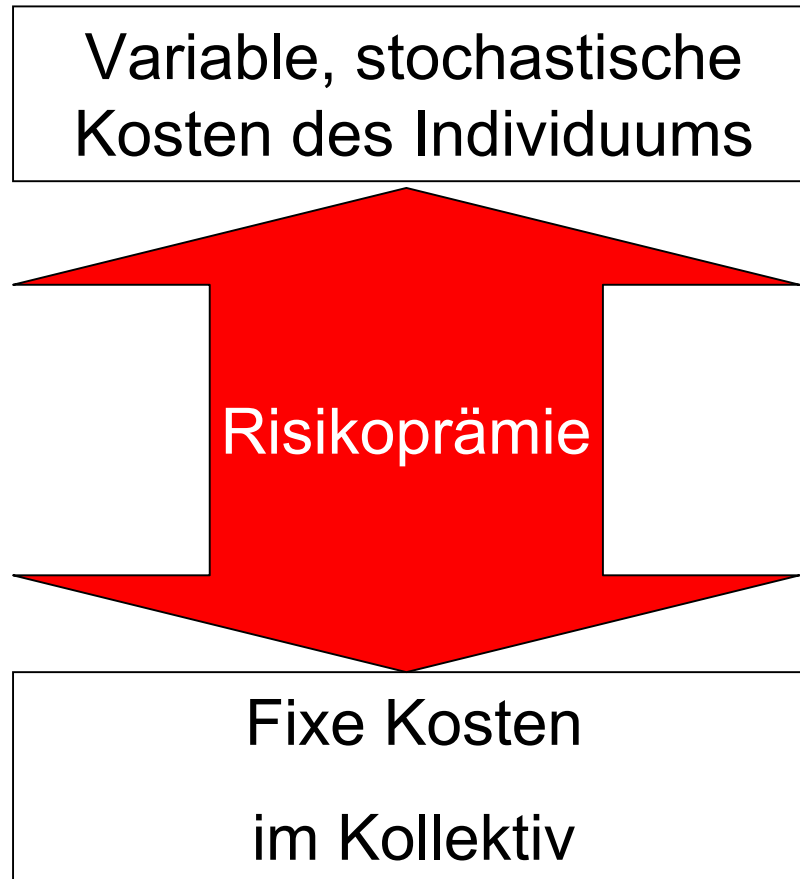
Einzel Schäden



Portefeuille n=30



1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.



1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.

- Rückversicherer decken „Spitzenrisiken“.
- Entweder „seltene Ereignisse“ (Groß-Schäden bei Groß-Risiken, wie z.B. Schiffe, Satelliten, Bohrinseln, hoch spezialisierte Zulieferbetriebe,...)
- Oder „Kumulereignisse“ (Naturgefahren, wie z.B. Erdbeben, Hurrikane, Winterstürme, Hochwasser,... Aber auch 9/11 oder Tschernobyl und im Bereich der Haftpflicht: Asbest)
- Niedrige Frequenz von Groß-Schäden, deswegen funktioniert dieser Ansatz hier nicht.

2. Preisfindung bei Groß-Risiken durch Marktprinzipien am Beispiel Lloyds of London

- Prämienfindung basierend auf dem frequentistischen Gesetz der großen Zahlen ist bei Groß-Risiken nicht möglich.
- Ermittlung von adäquaten Beiträgen nach subjektivem Wett-Verfahren.
- Im Vordergrund: individuelle subjektive Erwartungen der Marktteilnehmer.
- Ermittlung der Risikoprämien durch Marktprinzipien – bzw. Wettquoten – aus diesen Erwartungen.

Lloyds of London – Das Kaffeehaus.

- Im 17.Jahrhundert führte Edward Lloyd ein Kaffeehaus in London.
- Entwickelte sich zum Treffpunkt von Geschäftsleuten, insbesondere aus der Schiffsbranche.
- Erörterung und Austausch besonderer Vorkommnisse bei der Schifffahrt und der Schiffladung.
- Dort entstand 1688 der berühmte Versicherungsmarkt „Lloyds of London“.

Lloyds of London – Der Aufstieg zum Versicherungsmarkt

- Versicherungsnehmer waren ursprünglich nur Schiffseigner, die sich gegen Risiken (Schiffsuntergang) absichern wollten.
- Versicherungsgeber waren so genannte „Names“, die sich in Syndikaten zusammenschlossen.
- Tritt der vertraglich definierte Schadensfall ein, so werden die Versicherungsnehmer aus dem Privatvermögen der „Names“ bis zur vertraglichen Höhe entschädigt.
- Heute ist Lloyds of London ein Versicherungsmarkt, der praktisch jedes Groß-Risiko versichert.

Prinzip der Preisfindung in einem geschlossenen Markt: Lloyds of London

- Wie finde ich ein Syndikat, welches mein Risiko i.H.v. 75.000 Pfund deckt?
- Wie hoch ist die aufzubringende Prämie?
- Ich gehe ins Kaffeehaus...

- Lloyds of London - Die Quotierung:

- Es werden 10 verschlossene Kuverts abgegeben.
- „Meistbegünstigung“ ist vereinbart
- Jedes beinhaltet die verfügbare Kapazität (in Pfund)
- und die geforderte Prämie (% der Haftung)

- Lloyds of London -

Die Kuverts:

Name	Prämie (in % der Haftung)	Verfügbare Kapazität
M	6.23	10.000
J	7.15	800
F	6.47	9.000
N	8.06	5.000
I	6.59	8.000
C	7.61	4.000
G	6.42	20.000
L	6.42	20.000
H	6.92	15.000
D	6.77	400

- Lloyds of London -

Die Kuverts - Sortiert:

Name	Prämie (in % der Haftung)	Verfügbare Kapazität	Kumuliert	Anteil
M	6.23	10.000	10.000	13%
L	6.42	20.000	30.000	27%
G	6.42	20.000	50.000	27%
F	6.47	9.000	59.000	12%
I	6.59	8.000	67.000	11%
D	6.77	400	67.400	1%
H	6.92	15.000	82.400	10%
J	7.15	800	83.200	
C	7.61	4.000	87.200	
N	8.06	5.000	92.200	



- Lloyds of London - FAZIT:

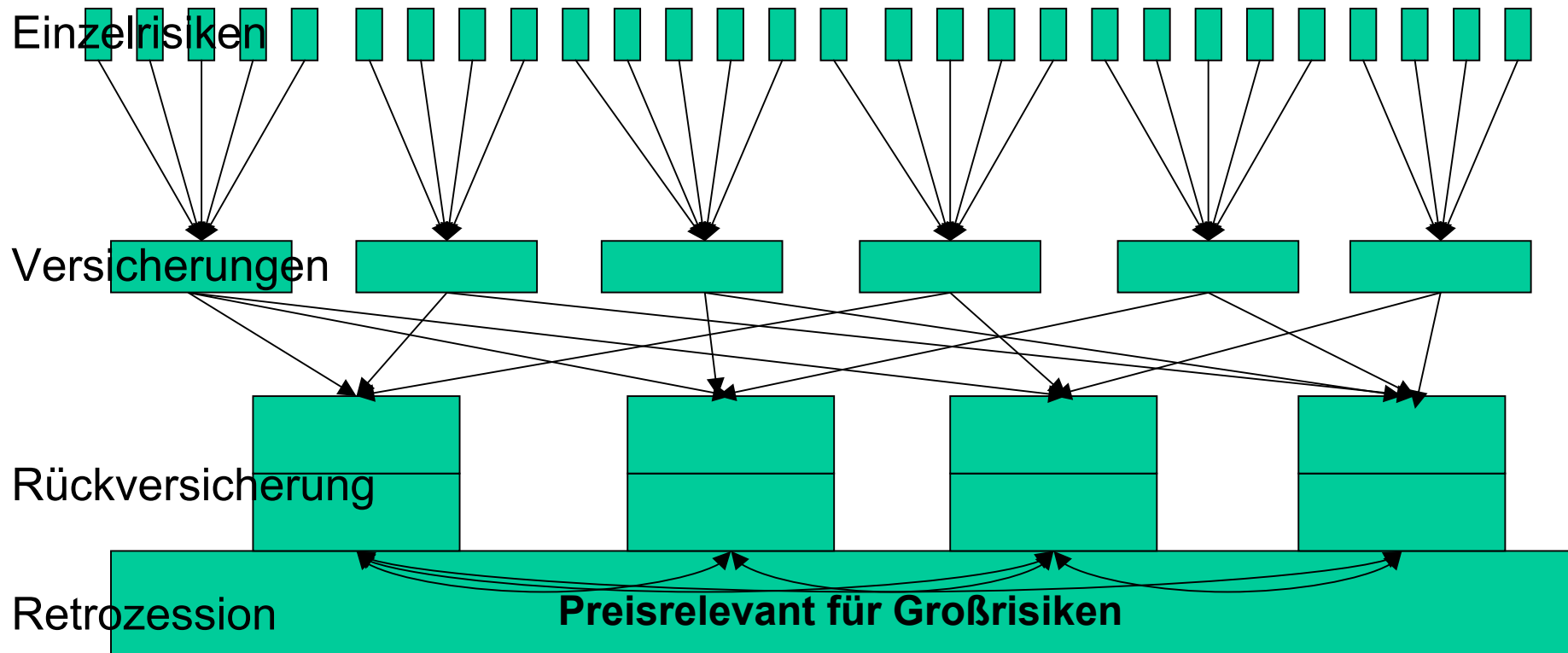
- Die Parteien M,L,G,F,I,D und H decken also zusammen die verlangten 75.000 Pfund.
- M,L,G,F,I und D bringen ihr gesamtes verfügbares Kapital ein.
- H bringt $(75.000 - 67.400 =) 7.600$ Pfund ein
- Die benötigte Kapazität wird zum Preis von $(0,0692 * 75.000 =) 5.190$ Pfund vom Markt zur Verfügung gestellt.

- Lloyds of London - FAZIT:

- Preisfindung ist nicht transparent.
- In Versicherungsmärkten hohe Zutrittsbarrieren für das Kapital.
- Diese Marktprinzipien beherrschten bis in die späten 1990er Jahre die Preisfindung bei Groß-Risiken und Katastrophendeckung.

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

klassisches Prinzip:



Risiken werden unter den Marktteilnehmern gebündelt und diversifiziert

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

klassisches Prinzip:

- **Diversifikation I:** Versicherungsunternehmen bündeln die Einzelrisiken
- **Diversifikation II:** Diese Bündel werden auf verschiedene Sparten aufgeteilt und an die Rückversicherer weitergegeben.
- **Diversifikation III:** Rückversicherer handeln untereinander die von Ihnen übernommenen Risiken, am „Retrozessions-Markt“

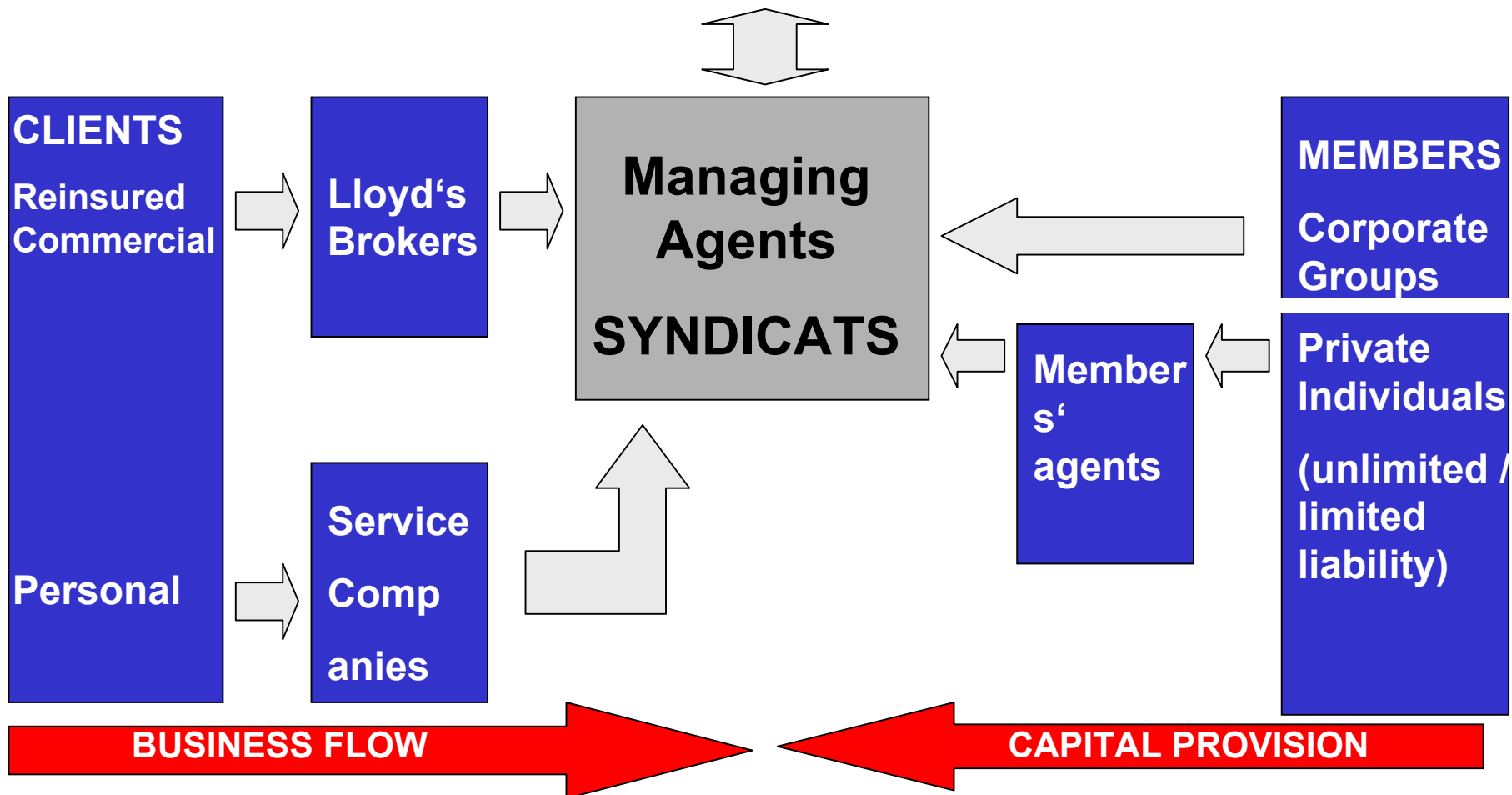
Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

Der „Retrozessions-Markt“:

- Retrozession bedeutet "Weitergabe eines Teils des Risikos an andere Rückversicherer gegen Prämie"
- Preisbestimmung für weitere Kapazitäten
- Dieser Handel bestimmt letztlich die Konditionen und Tarife der Versicherungsnehmer.
- Aktuelle Auswirkung: Begrenzung der Kfz-Haftpflicht Deckung auf 50.000.000 Euro.

- Lloyds of London –

Heute:
FRANCHISOR



3. Preisfindung bei Groß-Risiken mit Hilfe von Modellen: Der Kapitalmarkt

Setzt man für jede Person „rationales“ Verhalten voraus, so lässt sich mit Hilfe der Spieltheorie der Markt als Ganzes studieren.

Für uns von Interesse:

- Preis einer Versicherungsdeckung
- Am Markt verfügbare Kapazitäten.

Besonderes Interesse auf die zeitliche Entwicklung dieser Versicherungsparameter: Der Versicherungszyklus.

3. Preisfindung bei Groß-Risiken mit Hilfe von Modellen: Der Kapitalmarkt

Simulationsstudie zur Untersuchung des gesamten Marktes.

Annahmen:

- 100 unabhängige Marktteilnehmer
- Jeder erstellt unabhängig Quotierungen
- Jeder verfügt über die gleiche Kapazität
- Jeder kennt die Erfahrung des gesamten Marktes aus den letzten Jahren.

Wir betrachten die folgenden Szenarien:

3. Preisfindung bei Groß-Risiken mit Hilfe von Modellen: Der Kapitalmarkt

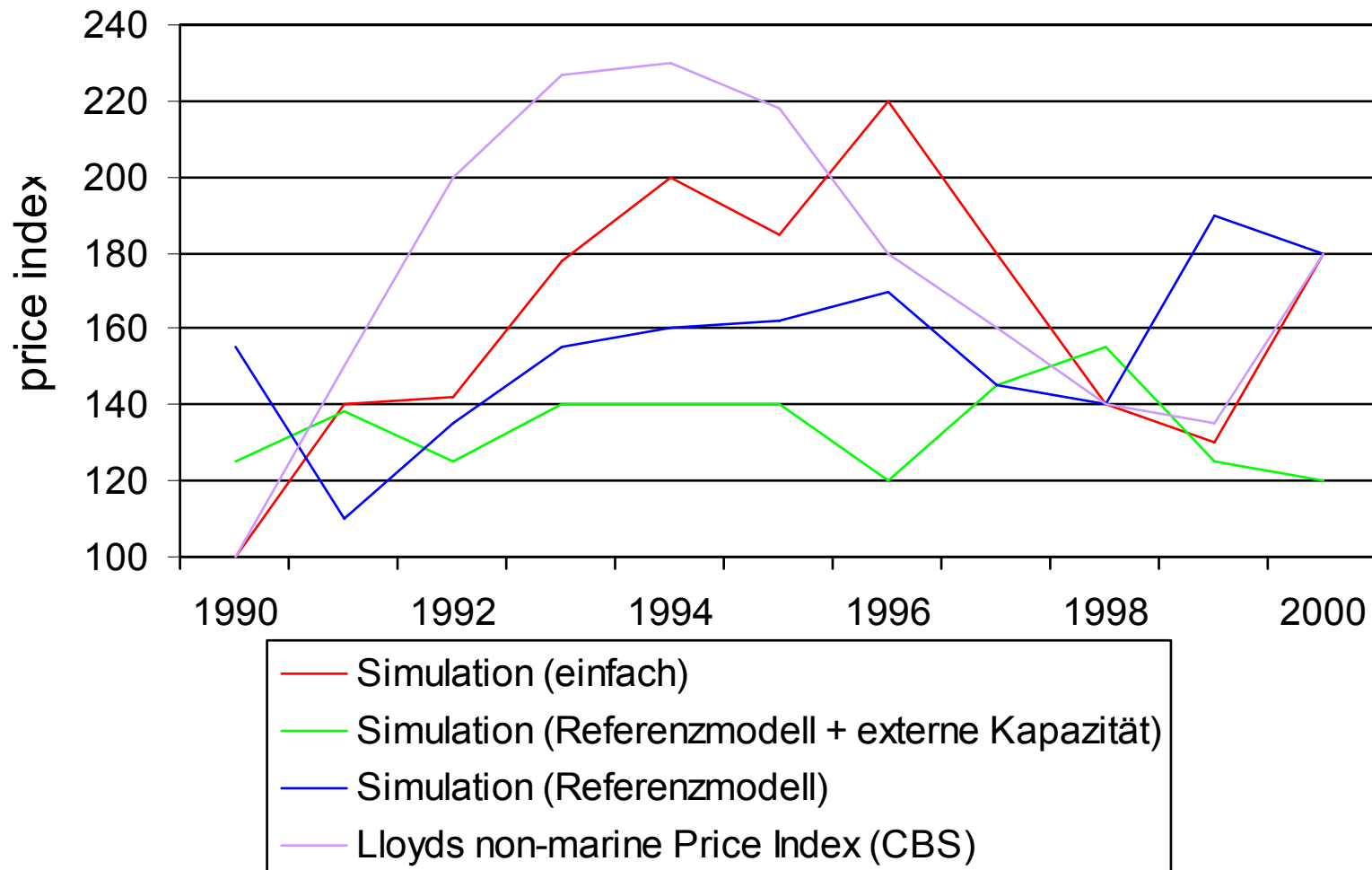
Rot	<ul style="list-style-type: none">•Kein Risikomodell vorhanden, welches als Marktreferenz dient.•Keinen Meinungsführer und kein Meinungsaustausch zwischen den Marktteilnehmern.•Kein Kapazitätszufluss von außen.
Blau	<ul style="list-style-type: none">•Allen Marktteilnehmern steht ein Risikomodell als Referenz zur Verfügung.•Kein Kapazitätszufluss von außen.
Grün	<ul style="list-style-type: none">•Allen Marktteilnehmern steht ein Risikomodell als Referenz zur Verfügung.•Kapazität kann dem Markt flexibel zugeführt werden.•Die Marktzutrittsbarrieren sind durchlässig.

3. Preisfindung bei Groß-Risiken mit Hilfe von Modellen: Der Kapitalmarkt

- Ziel: Prognose des Marktpreises zwischen 1990 und 2000.
- Die verschiedenen Szenarien werden durch entsprechende Simulationsparameter beschrieben.
- Den Simulationsergebnissen wird die tatsächliche Entwicklung des Londoner Marktes gegenübergestellt.
(Lloyds non-marine Index von CBS)

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

Mathematische Simulation der Preisfindung



Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

- Die Analyse -

- **Die einfache Simulation:**

Stark zyklisches Verhalten.

Hier beruht die Quotierung – also die Preisgestaltung – allein auf der Erfahrung des Marktes.

Große Ereignisse (die Winterstürme 1990) erzeugen erhöhten Schadendurchschnitt.

Dieser führt zu einer höheren Prämie

Der Zyklus wird verstärkt durch die Marktzutrittsbarrieren:

Schadenträchtiges Jahr → Reduzierung der verfügbaren
Versicherungskapazitäten → Verteuerung der Prämien

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

- Die Analyse -

- Die Simulation mit vorhandenem Referenzmodell:

Weniger stark zyklisches Verhalten.

Hier beruht die Quotierung – also die Preisgestaltung – nicht allein auf der Erfahrung des Marktes.

Jeder Marktteilnehmer verfügt über ein Risikomodell, der Quotierung liegen also zusätzliche physikalische Parameter zu Grunde.

Existenz von Risikomodell → verringerte Streuung der Quotierung → Glättung des Zyklus.


Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

- Die Analyse -

- Die Simulation mit Referenzmodell und externen Kapazitäten:

Kein zyklisches Verhalten, weil:

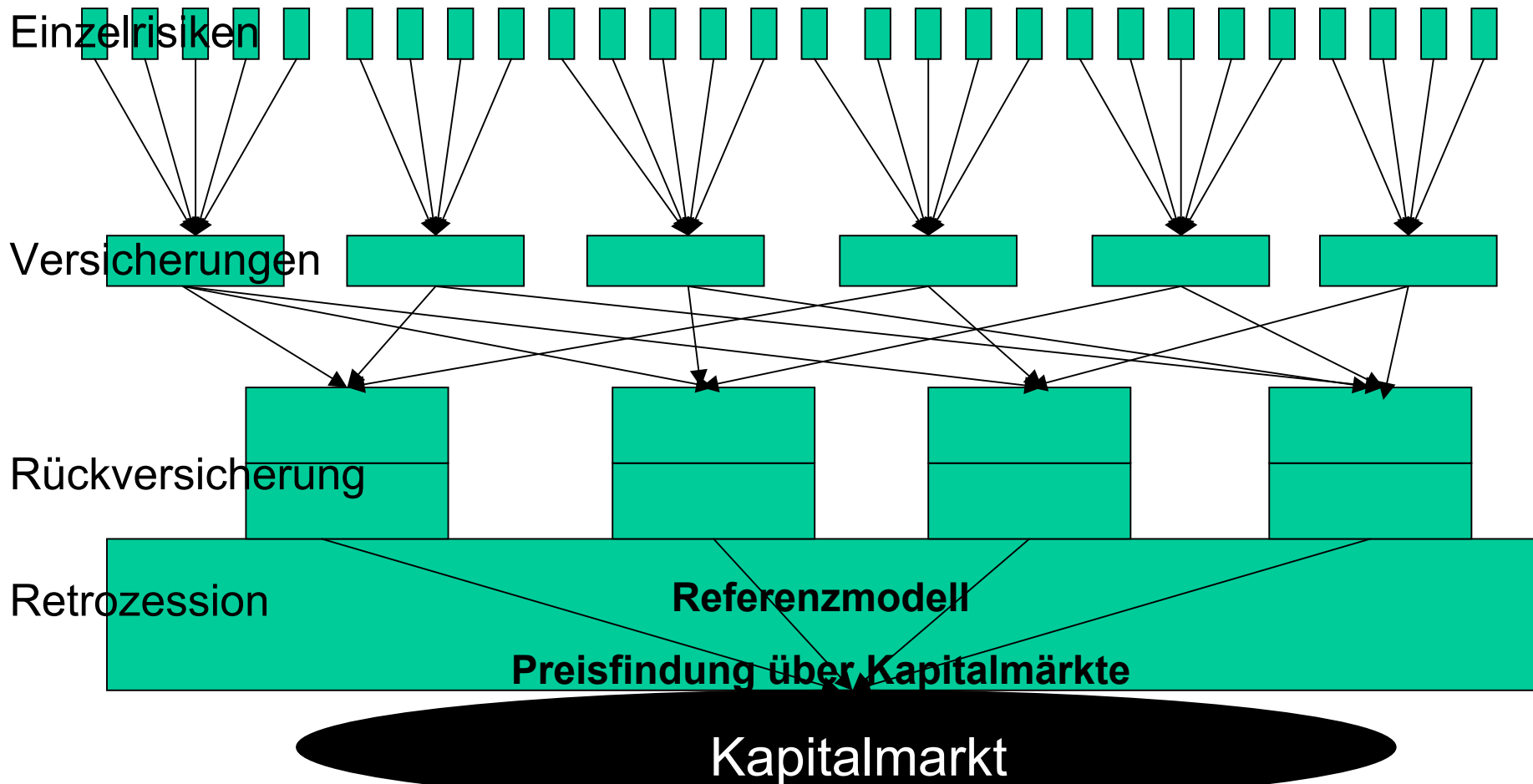
- Nach Schadensfall verlorene Kapazität wird von externen Investoren sofort wieder zugeführt.
- Überkapazitäten werden (z.B.. In Form von Dividendenzahlungen) abgeschöpft.

Grund: Externe Investoren  sind eher bereit „kalkulierbare“ Risiken einzugehen. (Zugang zum Kapitalmarkt)

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

klassisches Prinzip:

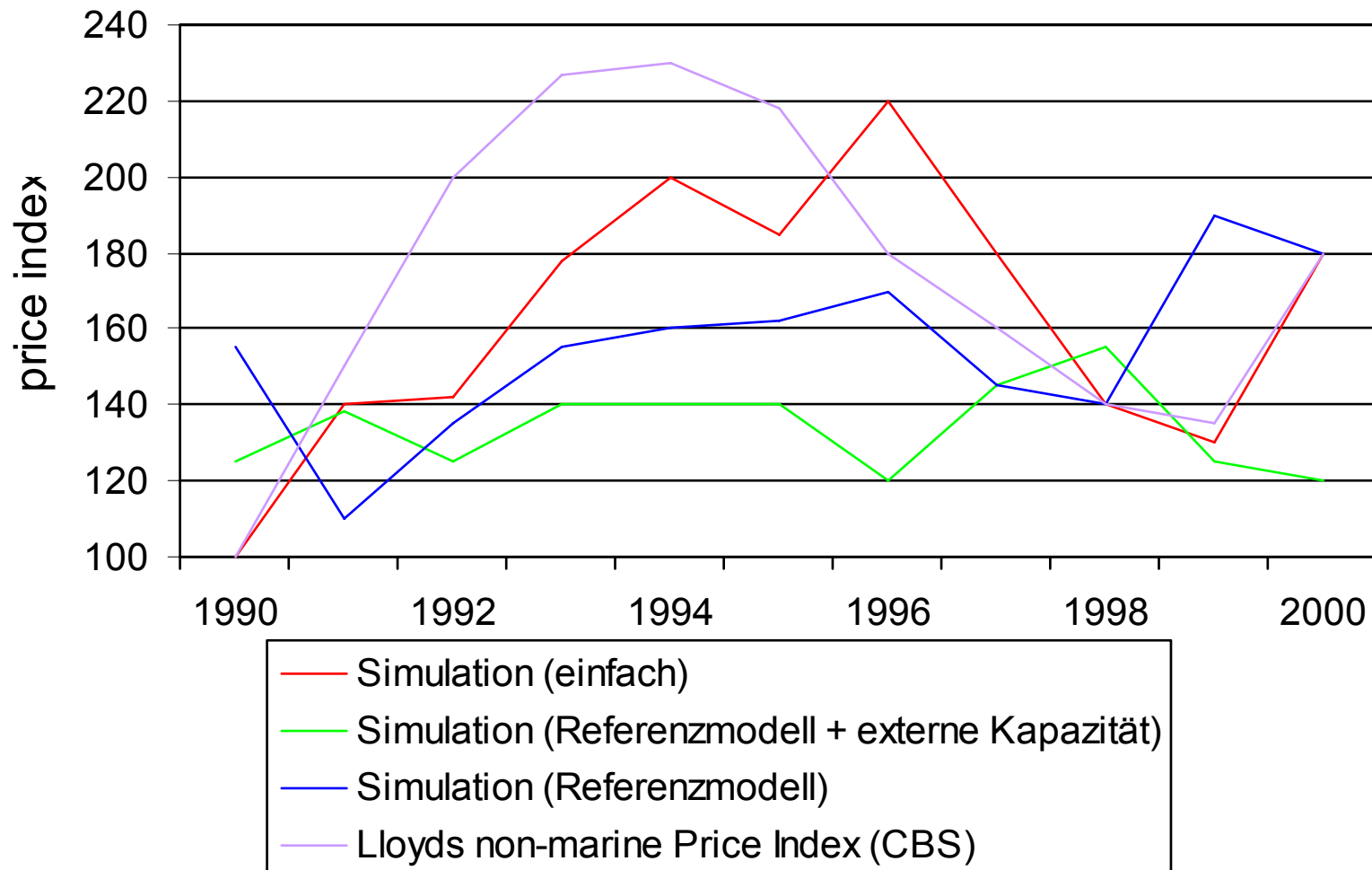
Mit Kapitalmarkttransfer



Risiken werden bewertet, gebündelt und auf dem Kapitalmarkt diversifiziert

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

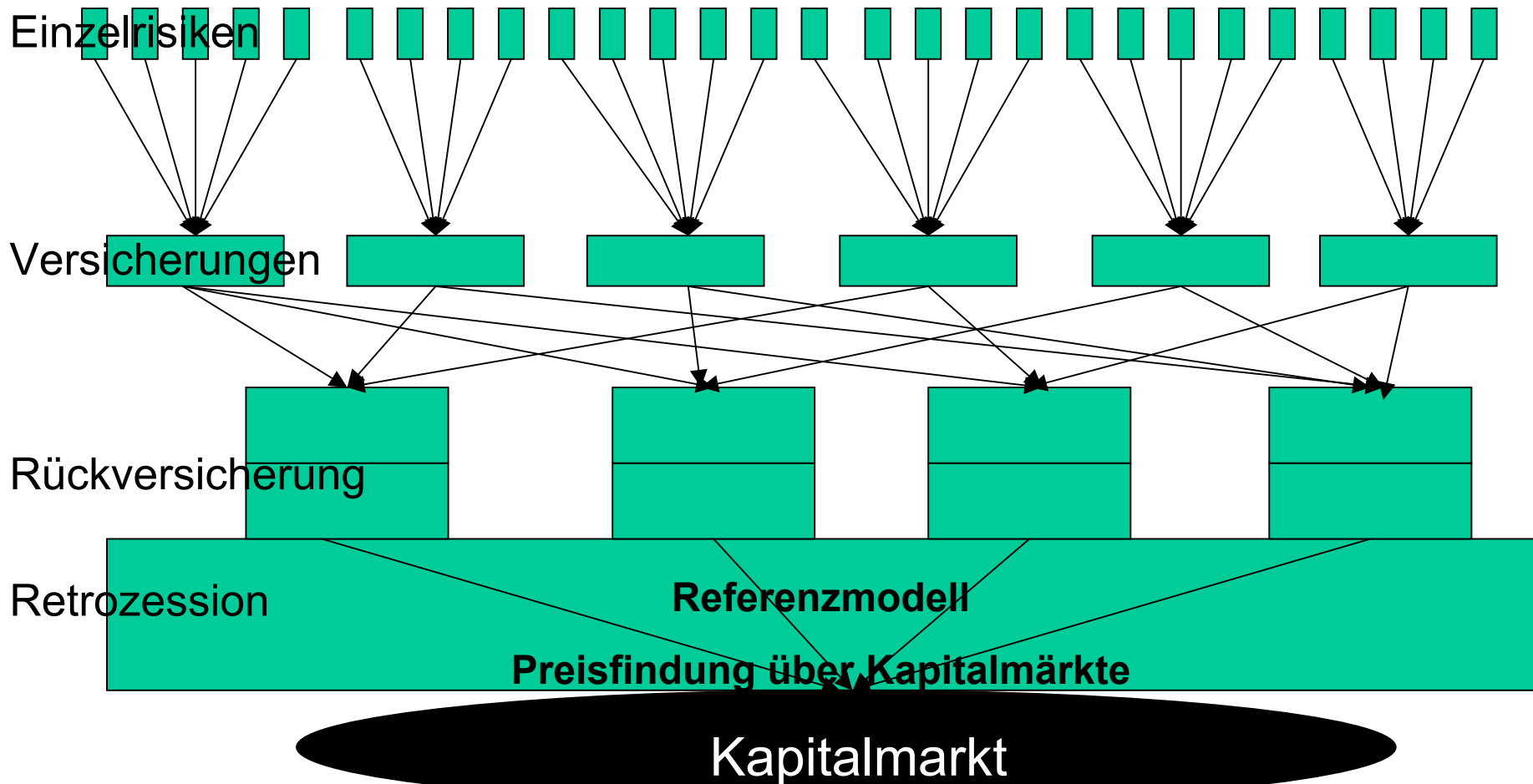
Mathematische Simulation der Preisfindung



Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

klassisches Prinzip:

Mit Kapitalmarkttransfer



Risiken werden bewertet, gebündelt und auf dem Kapitalmarkt diversifiziert


Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

- Securization -

- Versicherungsrisiken können direkt an Investoren am Kapitalmarkt abgegeben werden.
- Katastrophenanleihen
- Externe „Trigger“ als Ereignis

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

- Katastrophenanleihe -

- „Erdbeben in Umgebung von Tokio“-Anleihe:
- Die Anleihe verzinst, falls kein Erdbeben stattfindet, mit Marktzins (LIBOR) und einem entsprechendem Risikozuschlag.
-  Erdbeben in der Umgebung registriert („Trigger“)
Zins wird nach vorgegebenem Schema reduziert!

Im schlimmsten Fall erfolgt nur noch eine Rückzahlung von 60% des einbezahlten Kapitals.

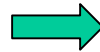
Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

- Securization -

- Ähnliche Anleihen decken Spitzenrisiken.
- Nutzung dieser Finanzmarktinstrumente nur, falls das „Risiko“ durch mathematisch anerkannte Verfahren „bewertet“ werden kann.



Dem „Financial Engineering“ sind heute keine Grenzen mehr gesetzt!



Subjektiven Preisfindung

objektive Risikomodelle

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

- Aufbau und Gestalt von Risikomodellen:

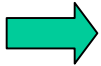
➡ Mögliche Szenarien:

➡ Erdbeben gewisser Stärke an definiertem Ort
Sturm, definiert durch Sturmbahn / Windstärke

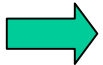
Bewertung dieser Szenarien durch entstehenden monetären Verlust!

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

- Stochastische Risikomodelle bewerten die einzelnen Szenarien mit Wahrscheinlichkeiten.



Für die ZV „monetärer Verlust“ kann so eine Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet werden.

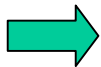


Erwartungswerte werden zur Preisfindung genutzt.

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

- Für die Beurteilung eines Risikos interessiert uns die „Wiederkehrperiode“.
- Die „Wiederkehrperiode“ ist der Kehrwert der Wahrscheinlichkeit

„Über einen sehr langen Zeitraum ist durchschnittlich alle T Jahre ein Verlust von mindestens X Geldeinheiten zu erwarten“



Quantil der Verteilung.

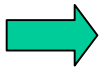
4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

- Value-at-Risk ist formal definiert, als das α -Quantil der Gewinn-und-Verlust Verteilung eines Portfolios von Wert V zum Zeitpunkt t über die Halteperiode oder Zeithorizont h .
- $\text{VaR}_\alpha(X)$ ist genau die Pseudo-Inverse der Verteilung F^X an der Stelle α .
- Problem: Unstetigkeitsstellen von F^X

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

Neue Interpretation:

„Über einen sehr langen Zeitraum ist durchschnittlich alle T Jahre ein Verlust von X Geldeinheiten zu erwarten“



Bedingter Erwartungswert des Verlustes.

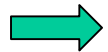
Der Bedingte Erwartungswert als Risikomaß besitzt besondere Eigenschaften und ist insbesondere ein kohärentes Risikomaß.

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation



Definition [Expected Shortfall]: Sei $X: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{R}$ eine Zufallsvariable, F ihre Verteilungsfunktion und $U^X: \mathbf{W} \rightarrow [0,1]$ mit $U^X := F^X \circ X$ ihr Uniformisierung. Der Expected Shortfall einer ZV X für Sicherheitslevel $\alpha \in]0,1[$ ist definiert als

$$\pi(X) := E(X \mid U^X \leq \alpha).$$



nach Schmeidlers Darstellungssatz: Choquet-Integral:

$$\int X d\mu,$$

Wobei μ die monotone Mengenfunktion mit $\mu(A) = \pi(1_A)$.

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

Definition [kohärenter Risikowert]: Ein Funktional

$$\pi: L(\mathbf{W}, \mathbf{A}, P) \rightarrow \mathbf{R}$$

heißt kohärenter Risikowert, wenn gilt

1. $X \geq Y \implies \pi(X) \geq \pi(Y)$ (Monotonie)
2. $\pi(X + a) = \pi(X) + a, a \in \mathbf{R}$ (Translationsinvarianz)
3. $\pi(c * X) = c * \pi(X)$, für $c \geq 0$ (positive Homogenität)
4. $\pi(X + Y) \geq \pi(X) + \pi(Y)$ (Superadditivität)

In der Praxis wird das Quantil bevorzugt, da es niedrigere Risiken suggeriert.

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

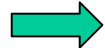
Probleme der Interpretation:

Fehlende Angaben zu den Wahrscheinlichkeitsräumen.

(Beispiel: Hurrikan Katrina)

Eintrittswahrscheinlichkeiten beziehen sich auf
unterschiedliche W-Räume (fehlende Vergleichbarkeit)

Für jede Katastrophe neues Maß



damit gerade dieses Ereignis, das Größte wird!

Fehlende Angaben (Regionen)
finanziellen Risikos



Unterschätzung des

Individuelle Risikosituation \neq Risikosituation von Markt

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation

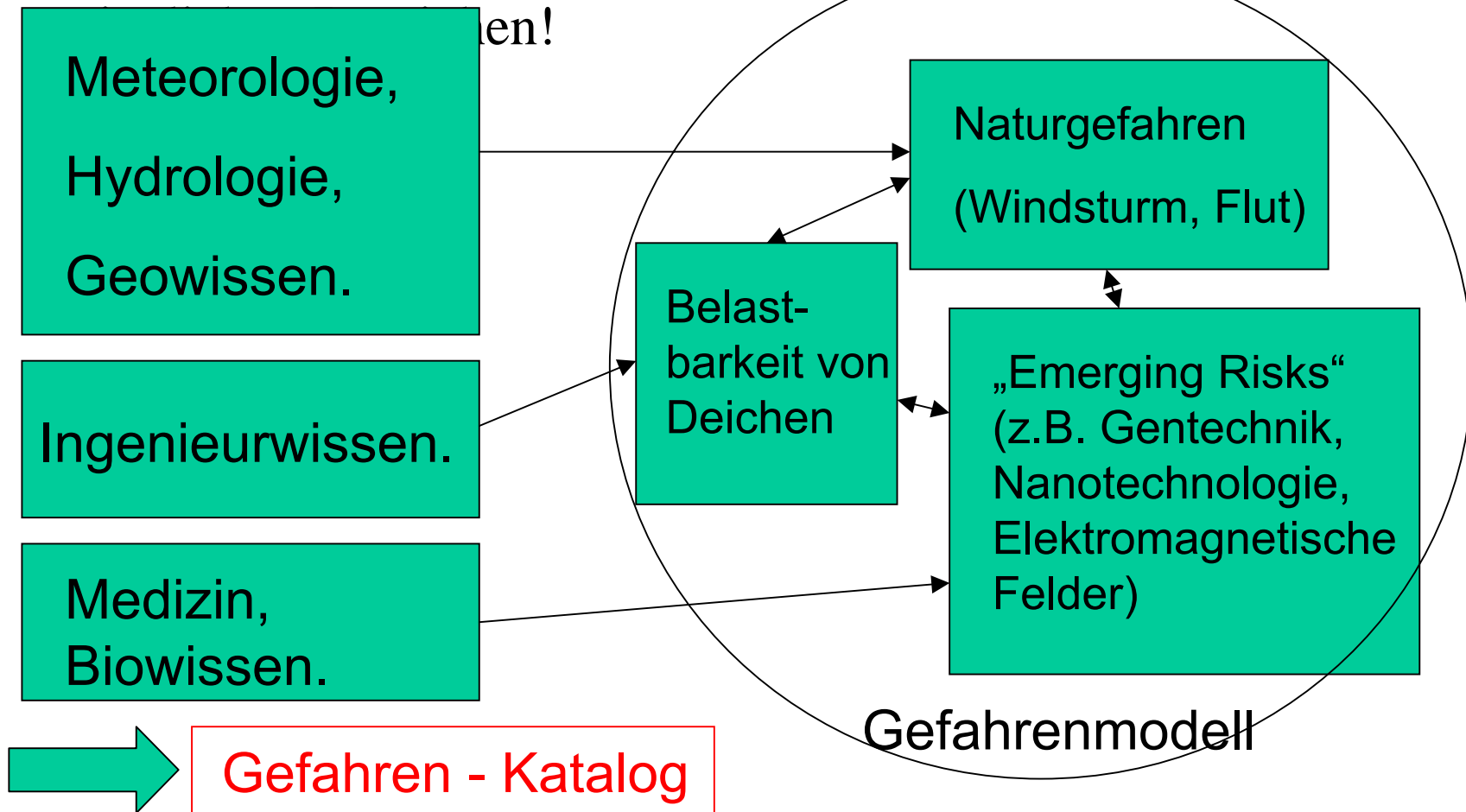
Kommerziell verfügbare Risikomodelle behandeln die Abschätzung von Risiken aus Naturgefahren.

2 Hauptkomponenten:

1. Gefahrenmodell (simuliert Naturkatastrophen anhand geographischer Koordinaten)
2. Schadenmodell (Modelliert die Auswirkungen der Ereignisse auf Sach- und Vermögenswerte)
3. Finanzmodell (Aggregation und monetäre Bewertung der Schäden)

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation – Das Gefahrenmodell:

Grundlage für Gefahrenmodelle sind Erkenntnisse aus
...en!



4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation – Der Gefahren-Katalog: Die 10 grössten versicherten Naturkatastrophen-Schäden

Katastrophe	Jahr	Region	Versicherter Schaden in mio USD
Hurrikan Frances 2004	USA		5'000
Windsturm Lothar	1989	Europa	6'400
Windsturm Daria 1999	Europa		6'600
Taifun Mireille	1991	Asien	7'800
Hurrikan Charley 2004	USA		8'000
Hurrikan Ivan	2004	Karibik	11'000
Erdbeben Northridge	1994	USA	15'900
Hurrikan Andrew 1992	USA		21'500
Hurrikan Katrina 2005	USA		35'000

4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation – Das Schadensmodell:

- Beschreiben die Auswirkung der simulierten Gefahren auf Sach- und Vermögenswerte.
- Basiert meist auf Erkenntnissen aus den Ing-wissen.:

Durchschnittl. zu erwartender  Schaden bei Erdbeben mit
gegebener Magnitude Schadensfunktion (monetärer
Schaden als Anteil der Versicherungs-summe, in

 Abhängigkeit der Magnitude)

Differenzierung zwischen Bauart und Höhe von Gebäude

Außerdem zu berücksichtigen: **ökonomische Komponenten**

5. Grundzüge der Extremwertstatistik

- Die Extremwerttheorie wurde in den 20er Jahren durch R.A Fisher (1890 – 1962) skizziert.
- Weiterentwicklung durch Emil Julius Gumbel (1891 – 1961) in den 50er Jahren.
- Besondere Betrachtung der „Tails“.
- Konvergenz dieser seltenen Werte nicht gegen eine symmetrische Verteilung.
- Aber: Auch die Maxima (z.B. Jahresmaxima,...)

$$\max\{ X_1 , X_2 , \dots, X_n \}$$

der Portefeuilles konvergieren mit wachsendem n gegen eine Grenzverteilung!