

Macht Mathematik Risiken beherrschbar?

BGW – Seminar von Max Plagemann

Zum Vortrag von Dr. Artur Klinger

anlässlich der

18. Bremer Universitäts - Gespräche im November
2005

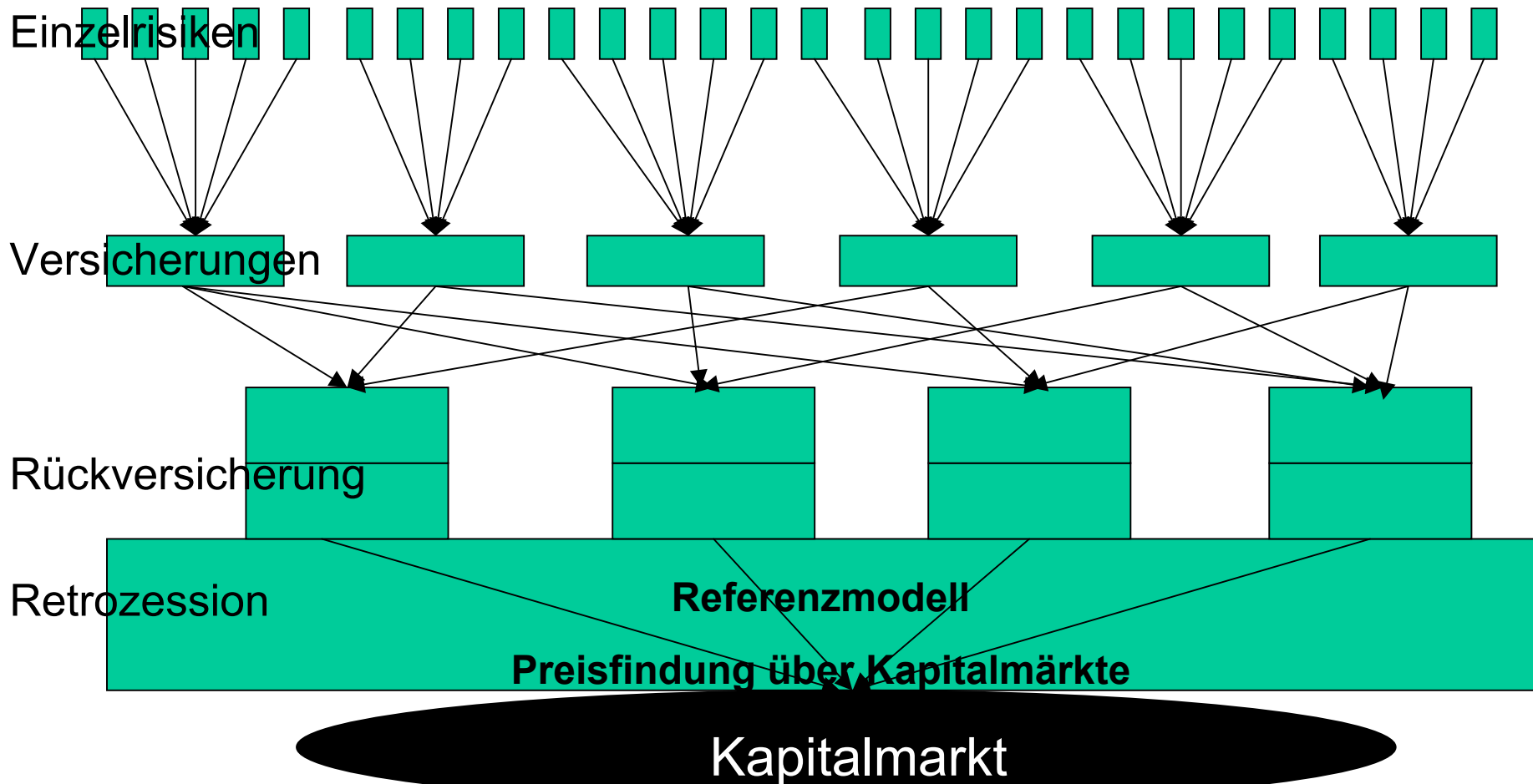
AGENDA

1. Wertschöpfung der (Rück-) Versicherung.
2. Preisfindung bei Groß-Risiken durch Marktprinzipien:
Lloyd
3. Preisfindung bei Groß-Risiken mit Hilfe von Modellen:
Der Kapitalmarkt
4. Überblick über Risikomodelle und deren Interpretation
5. Grundzüge der Extremwertstatistik
6. Outlook

Preisfindung auf Rückversicherungsmärkten

klassisches Prinzip:

Mit Kapitalmarkttransfer



Risiken werden bewertet, gebündelt und auf dem Kapitalmarkt diversifiziert

5. Grundzüge der Extremwertstatistik

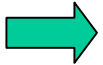
- Die Extremwerttheorie wurde in den 20er Jahren durch R.A Fisher (1890 – 1962) skizziert.
- Weiterentwicklung durch Emil Julius Gumbel (1891 – 1961) in den 50er Jahren.
- Besondere Betrachtung der „Tails“.
- Konvergenz dieser seltenen Werte nicht gegen eine symmetrische Verteilung.
- Aber: Auch die Maxima (z.B. Jahresmaxima,...)

$$\max\{ X_1 , X_2 , \dots, X_n \}$$

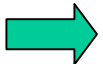
der Portefeuilles konvergieren mit wachsendem n gegen eine Grenzverteilung!

5. Grundzüge der Extremwertstatistik

- Zentraler Grenzwertsatz: Das arithmetische Mittel von Versuchsausgängen nähert sich einer Normalverteilung, mit wachsender Anzahl von Wiederholungen!



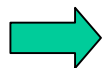
Die Verteilung der Summe von Schäden konvergiert gegen eine Normalverteilung.



Abschätzung einer Verteilung der Mittelwerte, obgleich die Einzelverteilungen unbekannt! (Kfz-Haftpflicht...)

5. Grundzüge der Extremwertstatistik

- Die Extremwerttheorie interessiert sich für die Randbereiche der Verteilung.
- Normalverteilungstheorie zu restriktiv, um das (Rand-)verhalten extremer Ereignisse zu beschreiben.
- Die Maxima wachsender Portefeuilles konvergieren gegen eine Familie von Grenzverteilungen (unter best.



Voraussetzungen):

Verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD) oder die verallgemeinerte Extremwertverteilung. (Gumbel)

5. Grundzüge der Extremwertstatistik

- Verallgemeinerte Extremwert-Verteilung

$$\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y_n,$$

wobei Y_n einer verallgemeinerten Extremwertverteilung folgt
(GEV Modell)

$$P(Y_n \leq x) \approx \exp\left\{-\left(1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)\right\}$$

(mit hinreichend großem x)

5. Grundzüge der Extremwertstatistik




- Ein bekannter Hedge Fond „Long Term Capital Management“ (LTCM), geführt von Meriweather und den Nobelpreisträgern Merton und Scholes (Mathematische Formel zur Bestimmung von Optionswerten an der Börse, 1997).
- Mit gewaltiger Hebelwirkung: mit nur 4,8 mrd\$ kontrollierten sie 160 mrd\$ und „wetteten“ auf die Konvergenz von Schatzbriefen bis zu Währungen.
- LTCM hatte mit 20% Verlust als Worst-Case-Szenario gerechnet. Wegen falscher mathematischer Annahmen: Verlust: 60%.



5. Grundzüge der Extremwertstatistik

- 70er Jahre: „Einfache Version der Extremwerttheorie“
- Alle „großen“ Schäden werden auf doppelt logarithmischem Papier aufgetragen.
- Empirisch belegt: Punkte nähern sich einer Geraden!
- Generalisierte Pareto-Verteilung: $(1 + \xi \frac{x}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}}$ $\xi \neq 0$



$$\text{POT-Modell: } P\{(X - u)^+ \leq x\} \approx \begin{cases} (1 + \xi \frac{x}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-x} & \xi = 0 \end{cases}$$

5. Grundzüge der Extremwertstatistik

- Annahme der linearen  Korrelation nicht geeignet:
Kreditausfallrisiken  Aktienkursrisiken
Erdbeben in Kalifornien  Kapitalmarkt (weltweit)

 Aktuelle Forschungsgebiete (der Statistik):
 extreme Ereignisse im mehrdimensionalen
Analyse von Zeitreihen mit Extremwerten

6. Outlook

- Risiken können mit Hilfe mathematischer Modelle
 wesentlich objektiver eingeschätzt werden.
Ausgefeilte Produkte und Strategien, um Risiken zu verarbeiten, zu versichern oder an den Kapitalmarkt weiterzugeben.
-  Verbesserung der Wertschöpfung des Risikotransfers!

ABER: Mit mathematischen Modellen allein beherrscht man nur einen kleinen Teil des gesamten Risikos!

6. Outlook

- Hurrikan Katrina wahrscheinlich größter versicherter Schaden aller Zeiten.
- Die meisten Modelle haben einen ähnlich starken Wirbelsturm „vorhergesehen“.
- Aber wesentlich niedrigere Schäden prognostiziert.

Denn: Größter Schaden durch die Flut.

Die Folgen dieser Flut wurden bewusst ausgeblendet, weil Gebäudepolicen in diesen Gebieten Flutschäden explizit ausschließen



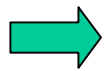
Druck der Gesellschaft



Flutschäden wurden beglichen

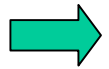
6. Outlook

- Weiteres Beispiel: Unisex-Richtlinie der EU für



Lebensversicherungen

Die Gesellschaft definiert Risiken!



Die Mathematik ist ein wichtiges „objektives“ Werkzeug, welches die Gesellschaft bei dieser Aufgabe unterstützt.

7. Spieltheorie - Definition:

- Spieltheorie ist die Theorie interdependenter Entscheidungen. Solche Entscheidungen liegen dann vor, wenn das Ergebnis des eigenen Handelns nicht nur von den eigenen Handlungen abhängt, sondern auch von denen der anderen Akteure.
- Spieltheorie kann zur Analyse von Gesellschaftsspielen, politischen Verhandlungen und ökonomischem Verhalten verwendet werden.

Die Auszahlungsmatrix eines Spiels

- Definition: Die Auszahlungsmatrix eines Spiels stellt die „Zahlungen“ an jeden Spieler für jede gewählte Strategiekombination dar.
- Bsp.: Zwei-Personen-Spiel

		Spieler B	
		b_1	b_2
Spieler A	a_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	a_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

Dominante Strategien

		Spieler B	
		b_1	b_2
Spieler A	a_1	1, 2	0, 1
	a_2	2, 1	1, 0

- Dominante Strategie:
 - Es existiert eine optimale Strategieentscheidung für jeden Spieler unabhängig davon, wie sich der andere Spieler entscheidet.
 - Problem: Häufig existieren keine dominanten Strategien.

Nash-Gleichgewicht I

Spieler B

		b_1	b_2
Spieler A	a_1	2, 1	0, 0
	a_2	0, 0	1, 2

- Nash-Gleichgewicht
 - Ein Nash-GG liegt dann vor, wenn keiner der Spieler einen Anreiz mehr hat, eine andere Strategie zu wählen, gegeben die (optimale) Strategie des Anderen.

Nash-Gleichgewicht II

- Probleme:
 - Es existieren mehrere Nash-Gleichgewichte
 - Manche Spiele haben kein Nash-Gleichgewicht
 - Nash-Gleichgewichte führen nicht notwendigerweise zu Pareto-effizienten Entscheidungen

(Eine Allokation ist dann Pareto-effizient, wenn keine Möglichkeit besteht, einen Spieler besser zu stellen, ohne einen anderen schlechter zu stellen).

Gefangenendilemma

		Spieler B	
		Gestehen	Leugnen
Spieler A	Gestehen	-3, -3	0, -6
	Leugnen	-6, 0	-1, -1

- Anwendbarkeit: u.a. Rüstungspolitik, Outputquote bei Kartellen etc.
- Problem: Das zustande kommende Nash-Gleichgewicht (gestehen, gestehen) ist Pareto-ineffizient.