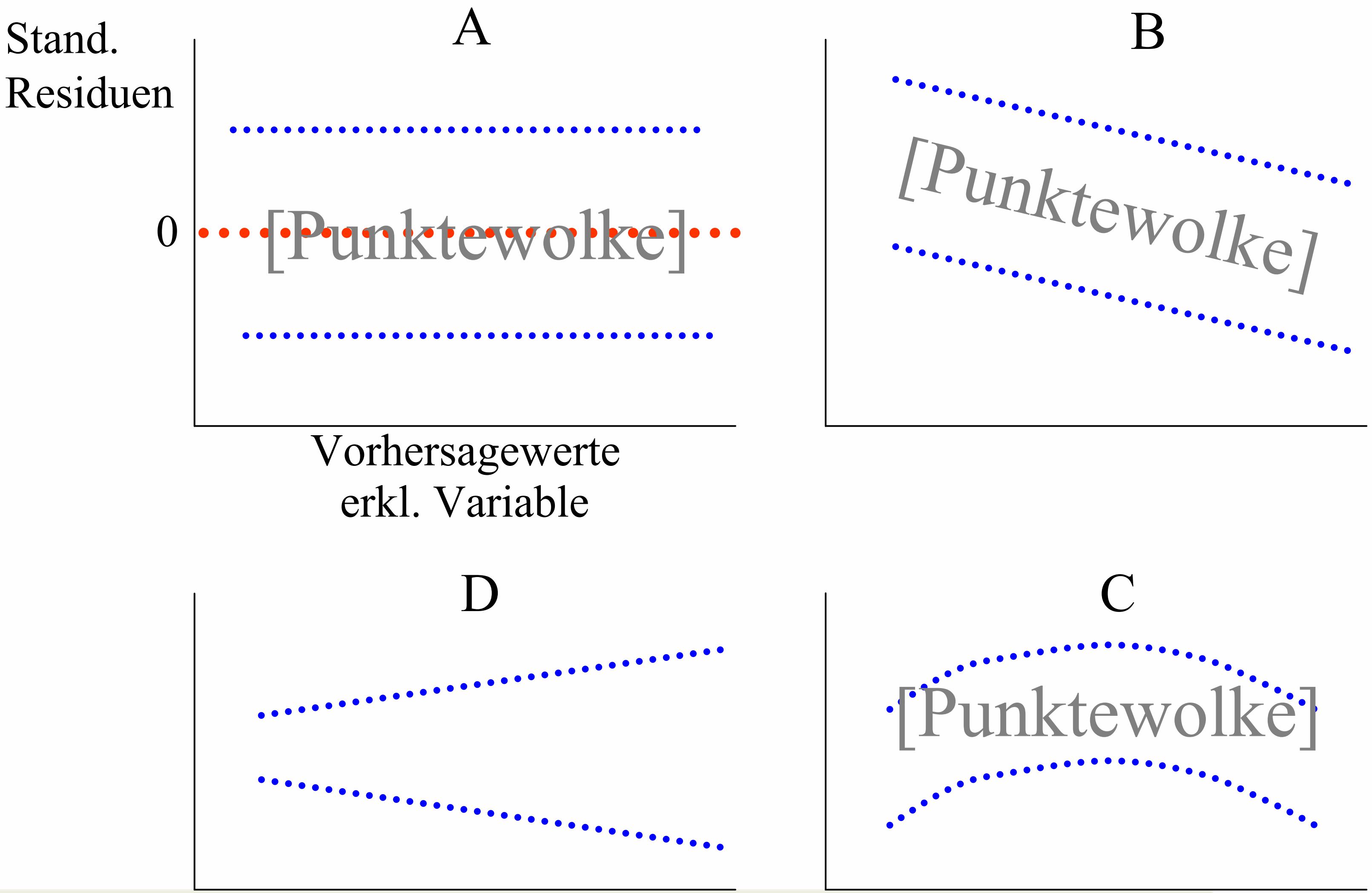

A
B
Stand.
Residuen
0
[Punktewolke]
[Punktewolke]
Vorhersagewerte
erkl. Variable
D
C
[Punktewolke]

Lineare Modelle (Beispiele)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log x + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x} + u$$

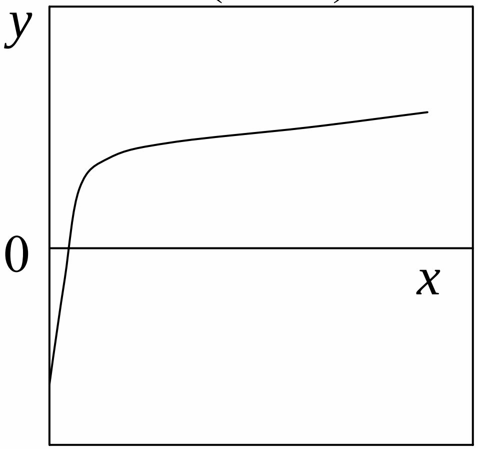
Nichtlineares Modell (Beispiel)

$$y = \beta_0 + e^{\beta_1 x} + u$$

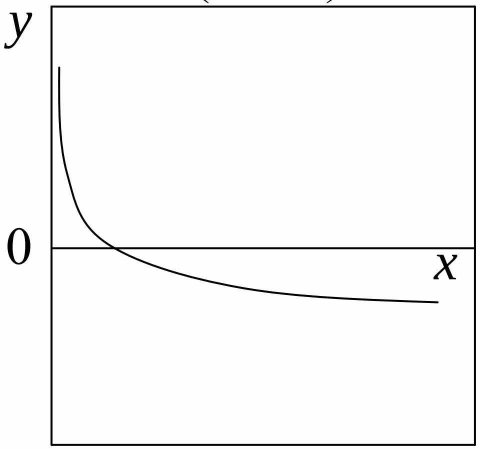
Linearisierbare Funktionen (Beispiel 1)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha + \log x^{\beta}$	$x' = \log x$	$y = \alpha + \beta x'$

(ß > 0)



(ß < 0)



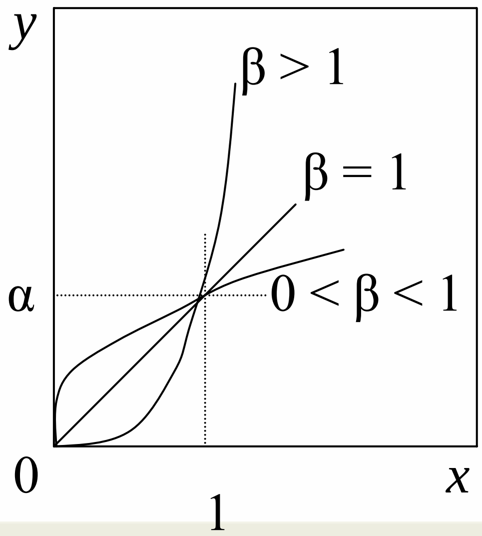
$$y = \alpha + \log x^{\beta}$$

$$y = \alpha + \log\left(x^{\beta}\right) = \alpha + \beta(\log x)$$

Linearisierbare Funktionen (Beispiel 2)

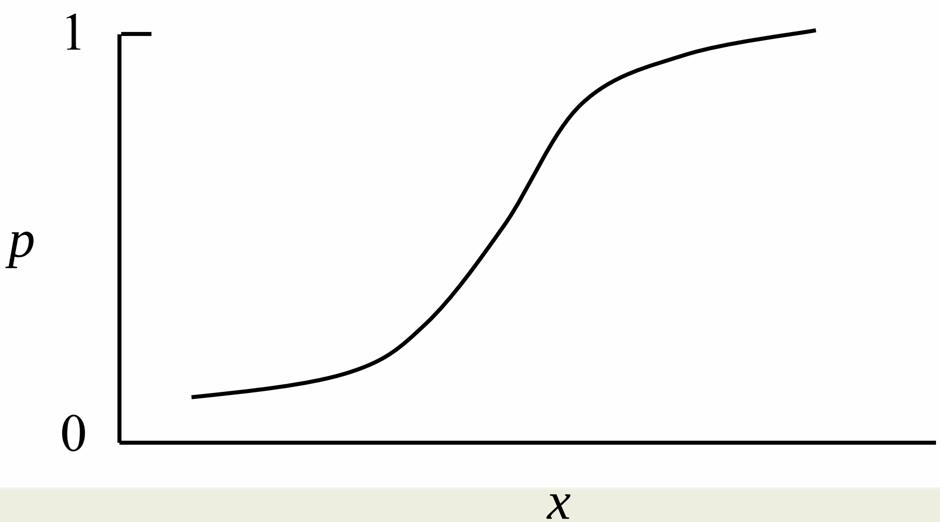
Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha x^{\beta}$	$y' = \log y$ $x' = \log x$	$y' = \log \alpha + \beta x'$

(α, ß, x > 0)



Linearisierbare Funktionen (Beispiel 3)

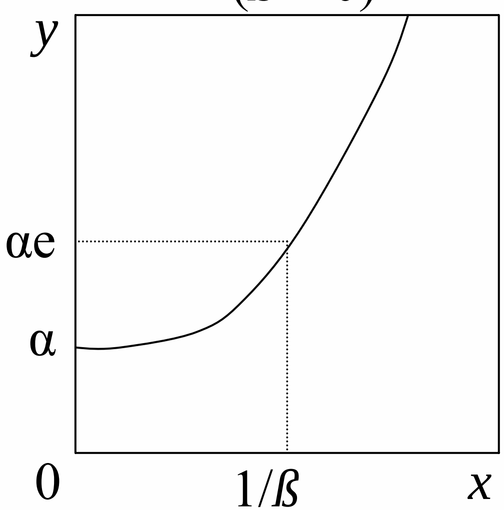
Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \dfrac{e^{\alpha+\beta x}}{1+e^{\alpha+\beta x}}$	$y' = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$	$y' = \alpha + \beta x$



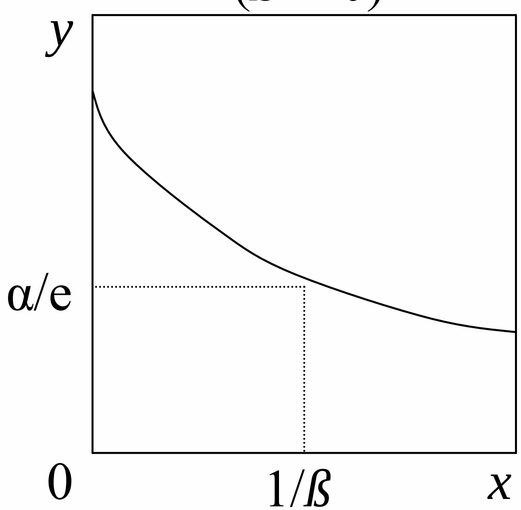
Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$

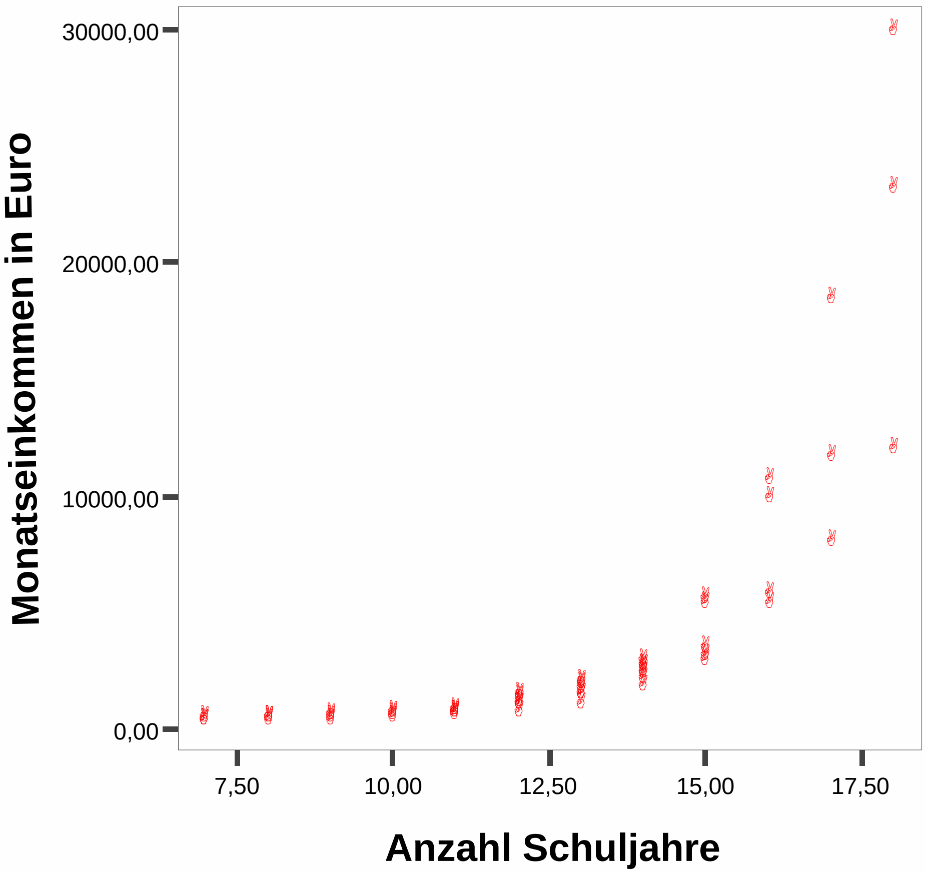
(ß > 0)



(ß < 0)



Ausgangspunkt: Beispiel einer *kurvi*linearen Beziehung zw. Einkommen und Schulbildung



[n=50; fiktive Zahlen]

wenn als **lineare** Einfachregression geschätzt, ..

Modellzusammenfassung[b]

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,708[a]	,501	,491	4277,19534

a. Einflußvariablen : (Konstante), EDUC Anzahl Schuljahre

b. Abhängige Variable: INCOME Monatseinkommen in Euro

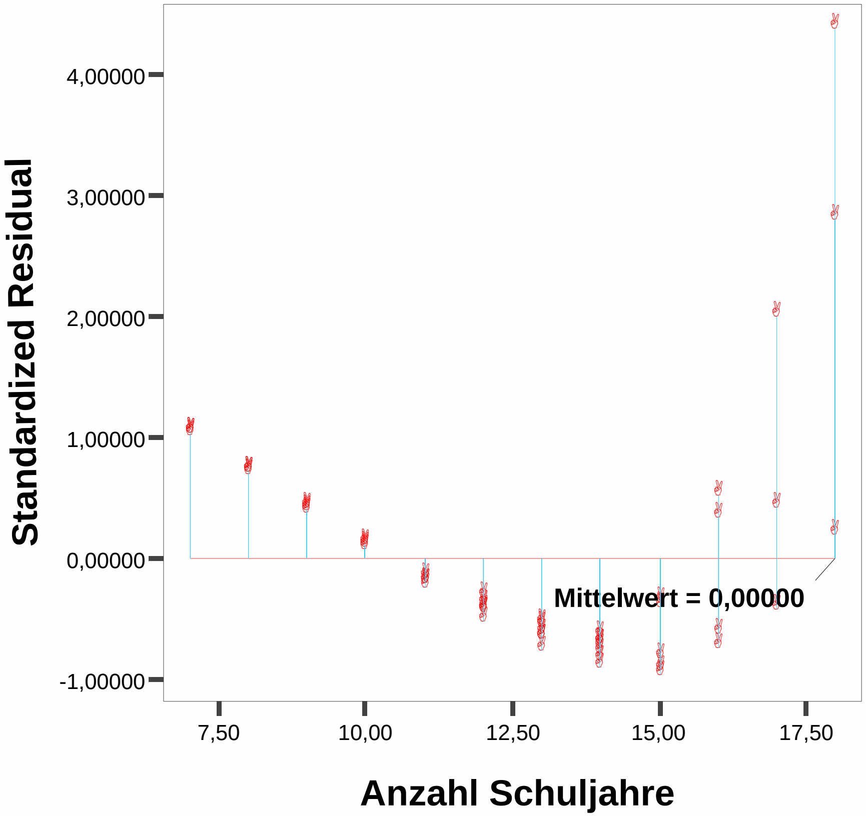
Ergebnis:
50% erklärte Varianz, positiver Effekt der Schulbildung,

aber …. »

Koeffizienten[a]

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		Standardisierte Koeffizienten		
		B	Standardfehler	Beta	T	Signifikanz
1	(Konstante)	-13780,111	2607,219		-5,285	,000
	EDUC Anzahl Schuljahre	1379,899	198,752	,708	6,943	,000

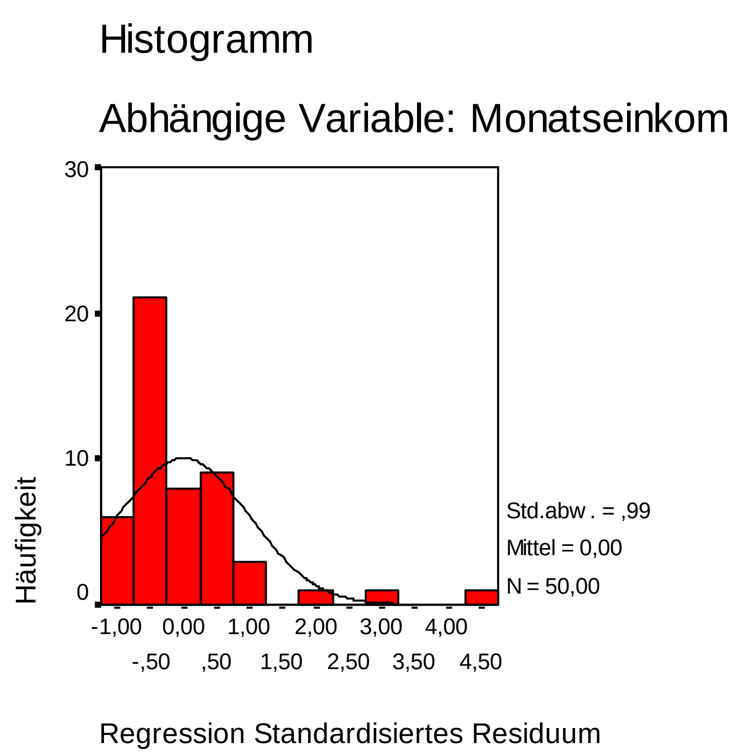
a. Abhängige Variable: INCOME Monatseinkommen in Euro



Mittelwert

.. es werden in Abhängigkeit von X die stand. Residuen erst über-, dann unter-, dann wieder überschätzt [Residuen streuen nicht um Null]

NV Annahme verletzt; Stand. Residuen weichen von Null stärker nach oben als nach unten ab

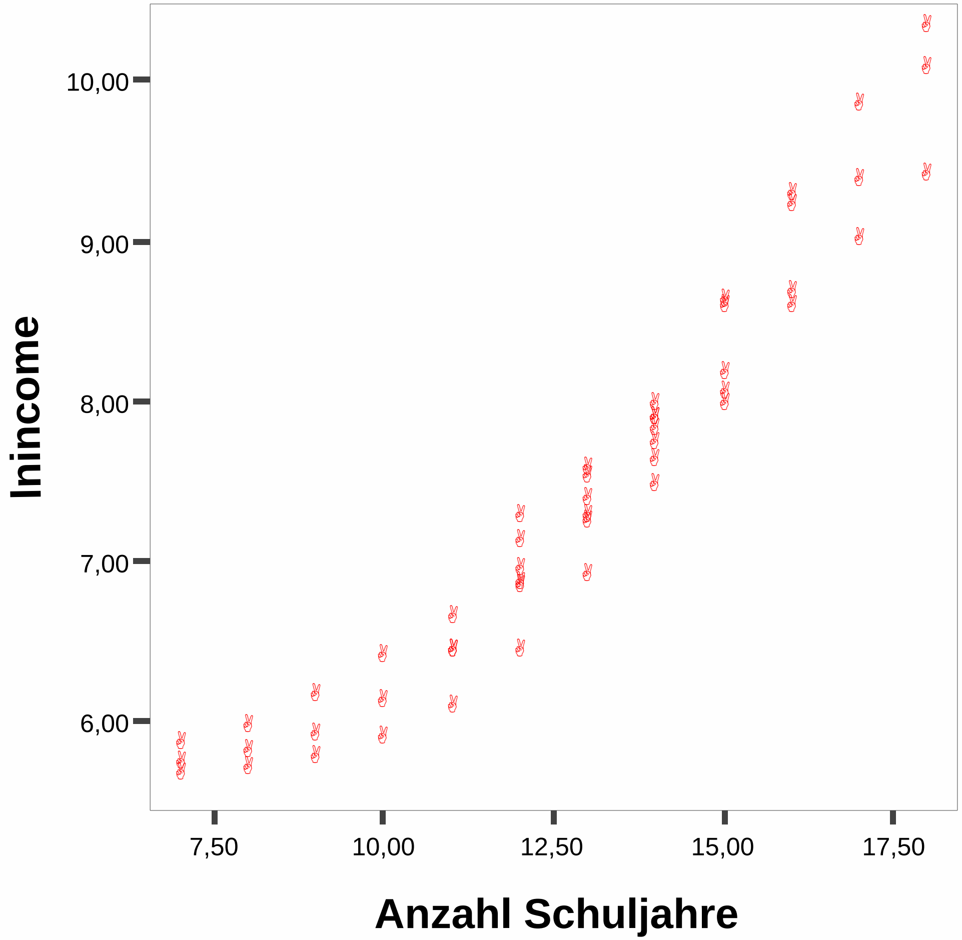


Residuenstatistik[a]

	Minimum	Maximum	Mittelwert	Standardabweichung	N
Nicht standardisierter vorhergesagter Wert	-4120,8179	11058,0703	3827,4000	4242,24759	50
Nicht standardisierte Residuen	-4088,3735	18661,9297	,0000	4233,32551	50
Standardisierter vorhergesagter Wert	-1,874	1,704	,000	1,000	50
Standardisierte Residuen	-,956	4,363	,000	,990	50

a. Abhängige Variable: INCOME Monatseinkommen in Euro

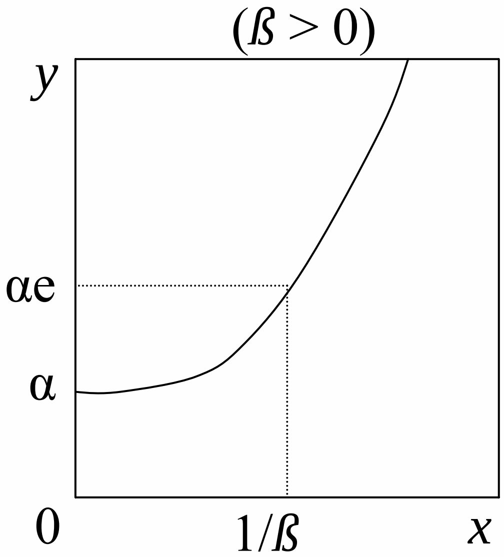
Beziehung zwischen dem *natürlichen Logarithmus* von Einkommen und Anzahl der Schuljahre ..

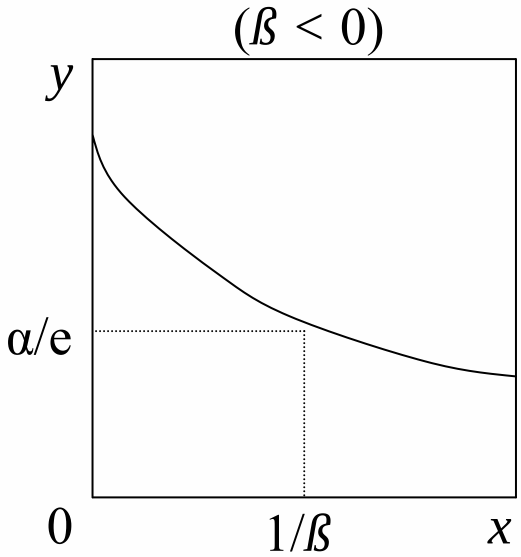


.. stellt in stärkerem Maße eine lineare Beziehung dar als die Ursprungsbeziehung

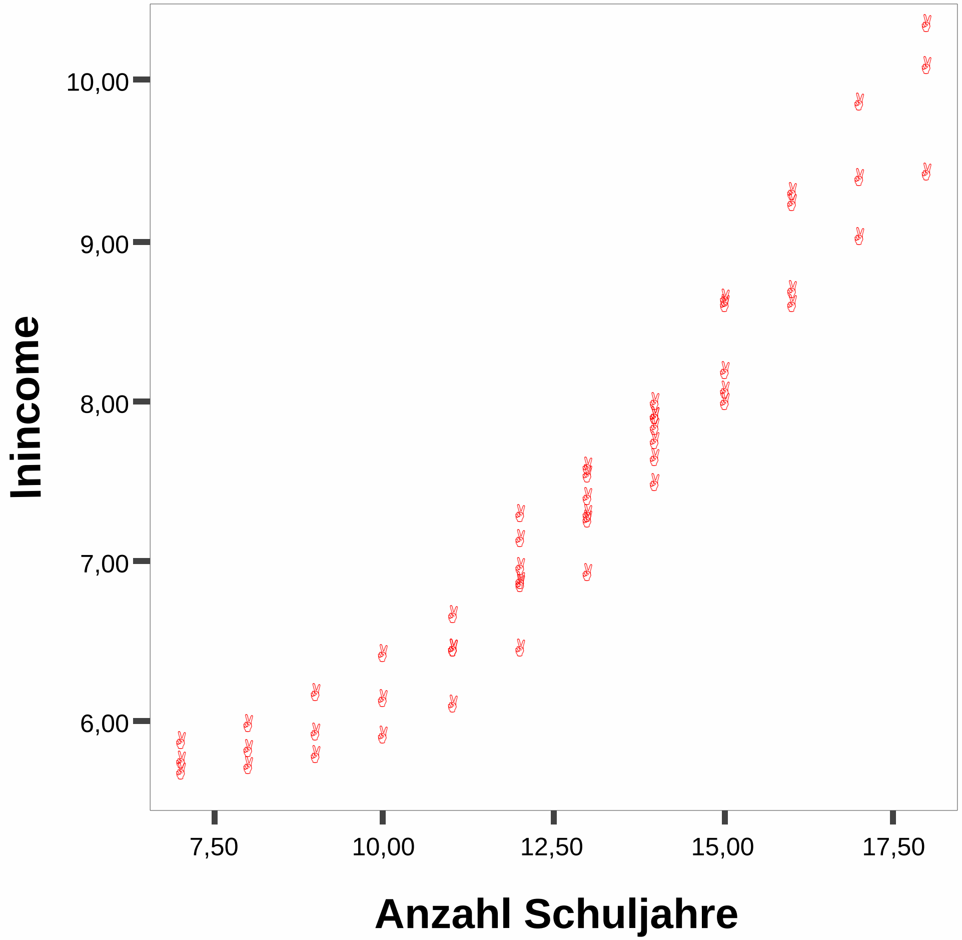
Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$



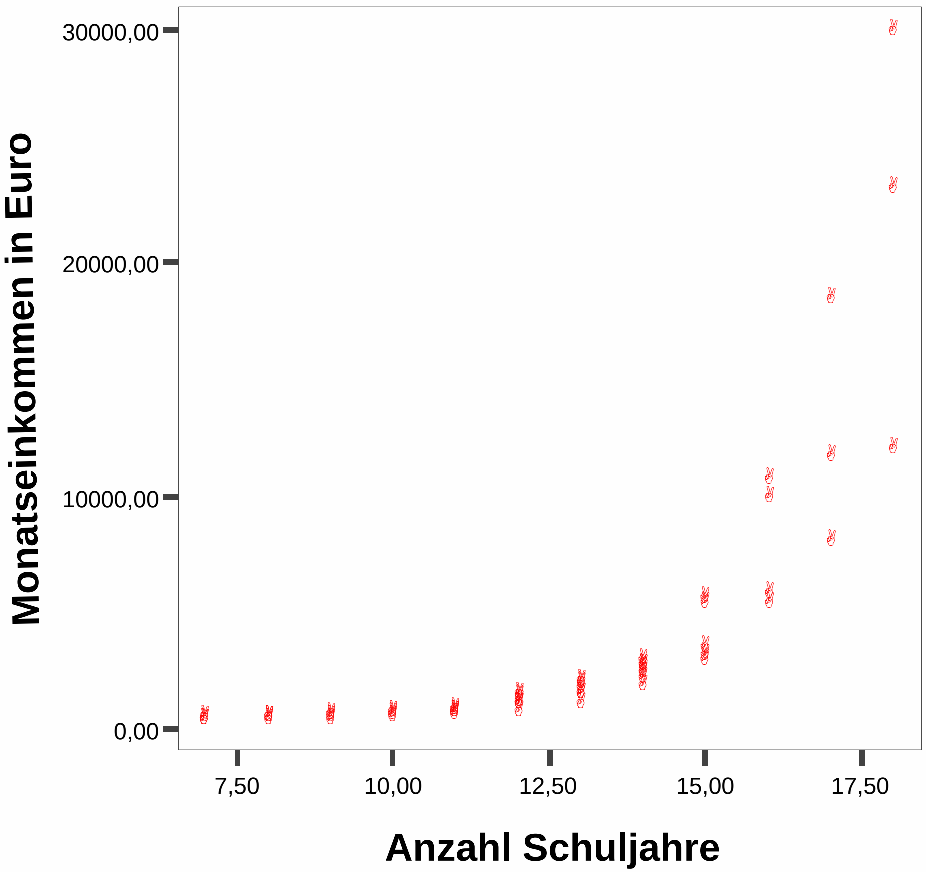


Beziehung zwischen dem *natürlichen Logarithmus* von Einkommen und Anzahl der Schuljahre ..



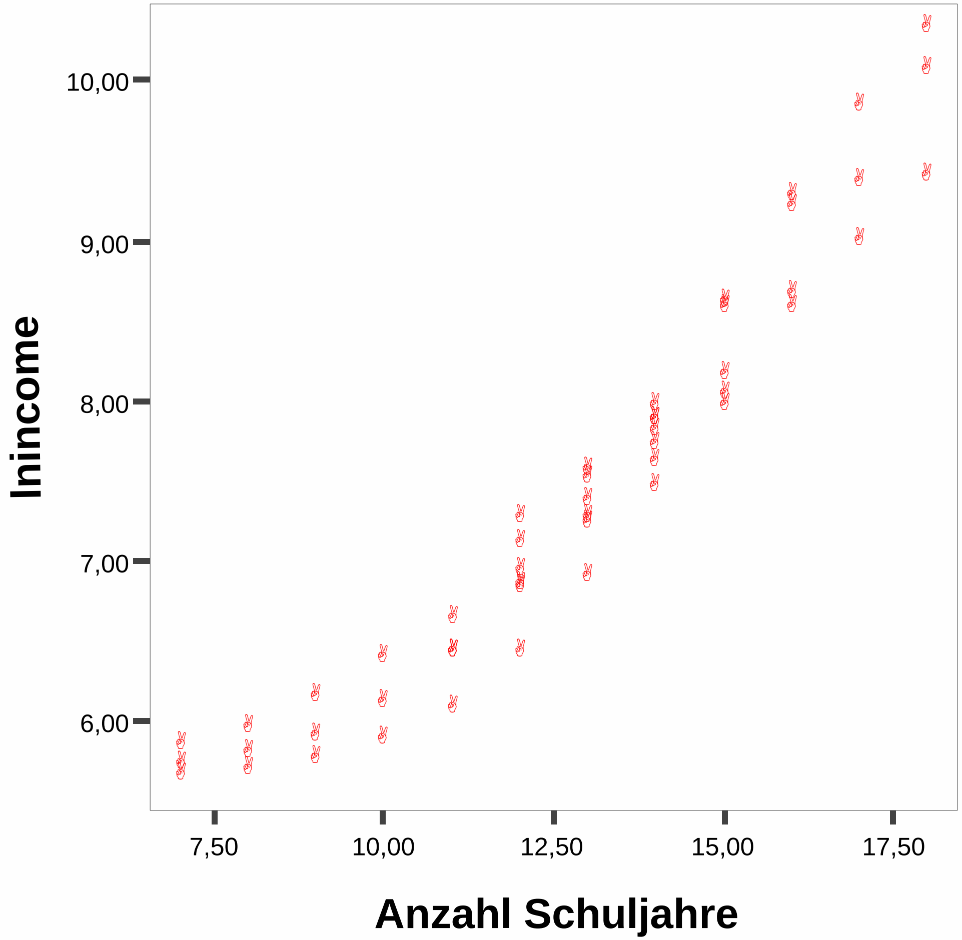
.. stellt in stärkerem Maße eine lineare Beziehung dar als die Ursprungsbeziehung

Ausgangspunkt: Beispiel einer *kurvi*linearen Beziehung zw. Einkommen und Schulbildung



[n=50; fiktive Zahlen]

Beziehung zwischen dem *natürlichen Logarithmus* von Einkommen und Anzahl der Schuljahre ..



.. stellt in stärkerem Maße eine lineare Beziehung dar als die Ursprungsbeziehung

Modellzusammenfassung[b]

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,959[a]	,919	,918	,36843

a. Einflußvariablen : (Konstante), EDUC Anzahl Schuljahre

b. Abhängige Variable: LNINCOME

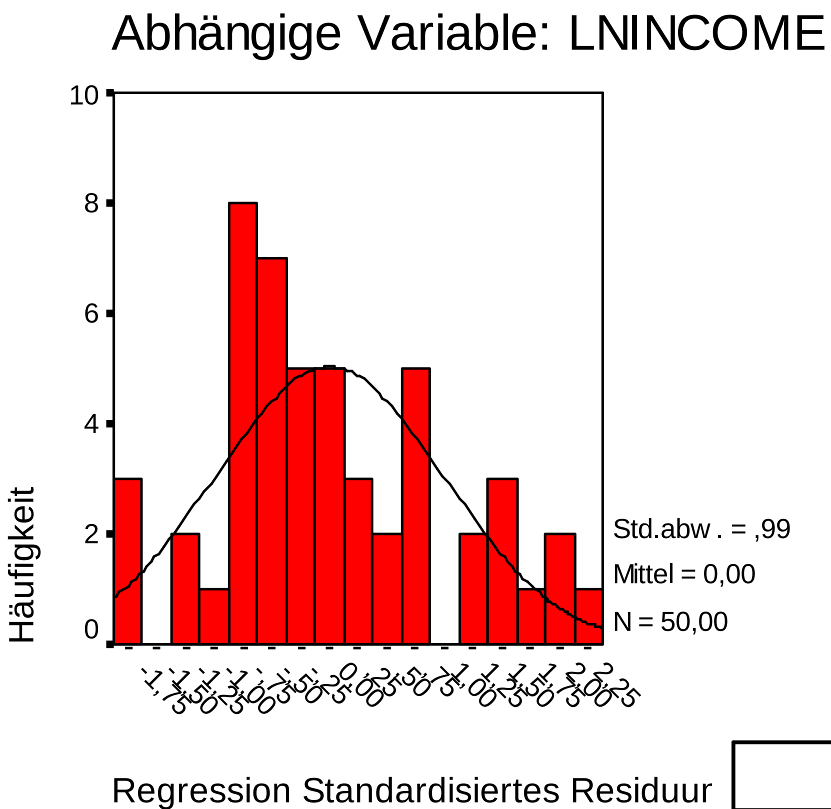
Erklärte Varianz liegt nun bei ca. 92% ….

Koeffizienten[a]

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		Standardisierte Koeffizienten		
		B	Standardfehler	Beta	T	Signifikanz
1	(Konstante)	2,288	,225		10,190	,000
	EDUC Anzahl Schuljahre	,401	,017	,959	23,402	,000

a. Abhängige Variable: LNINCOME

Histogramm

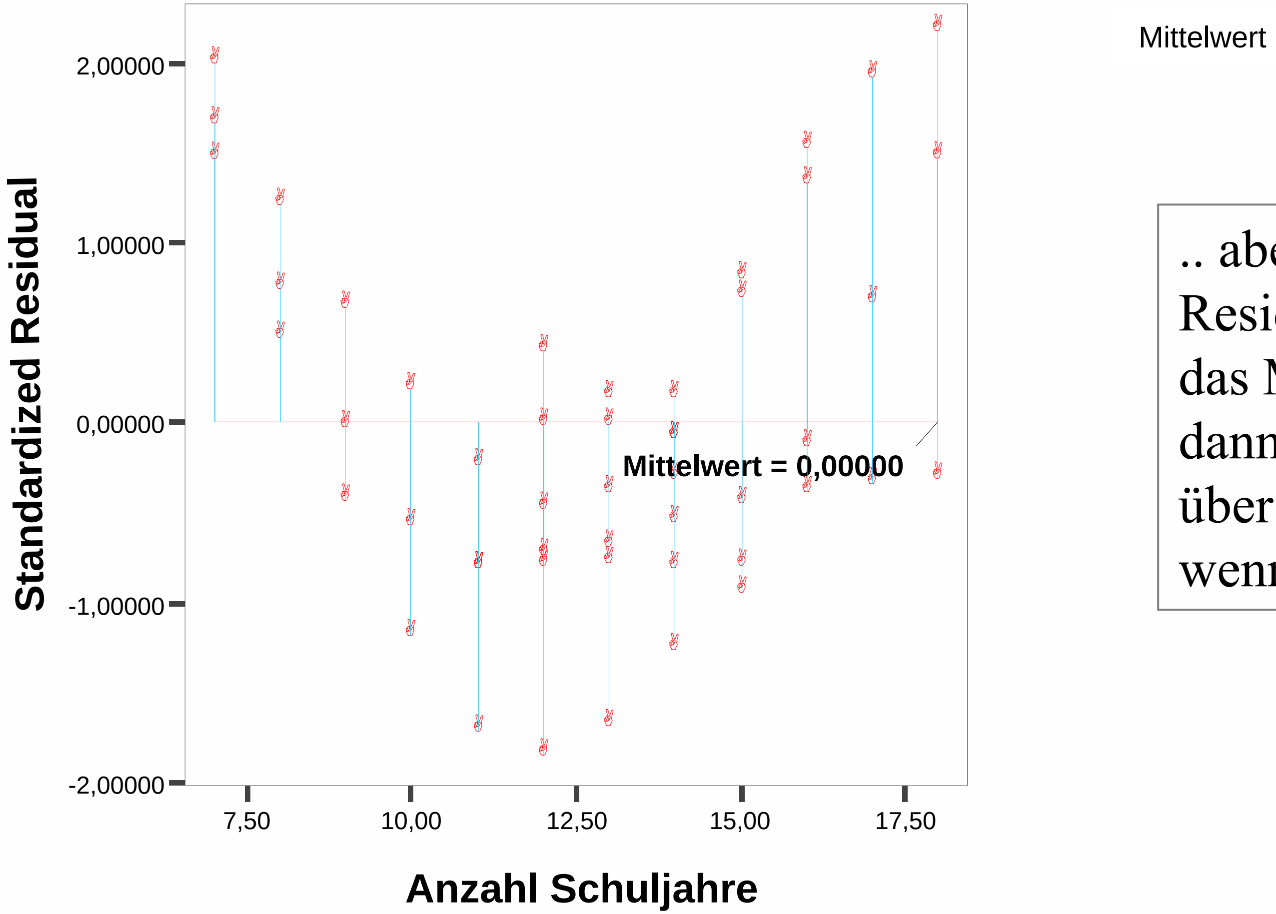


NV Annahme ist weniger stark verletzt; stand. Residuen liegen ausgewogener um Null

Residuenstatistik[a]

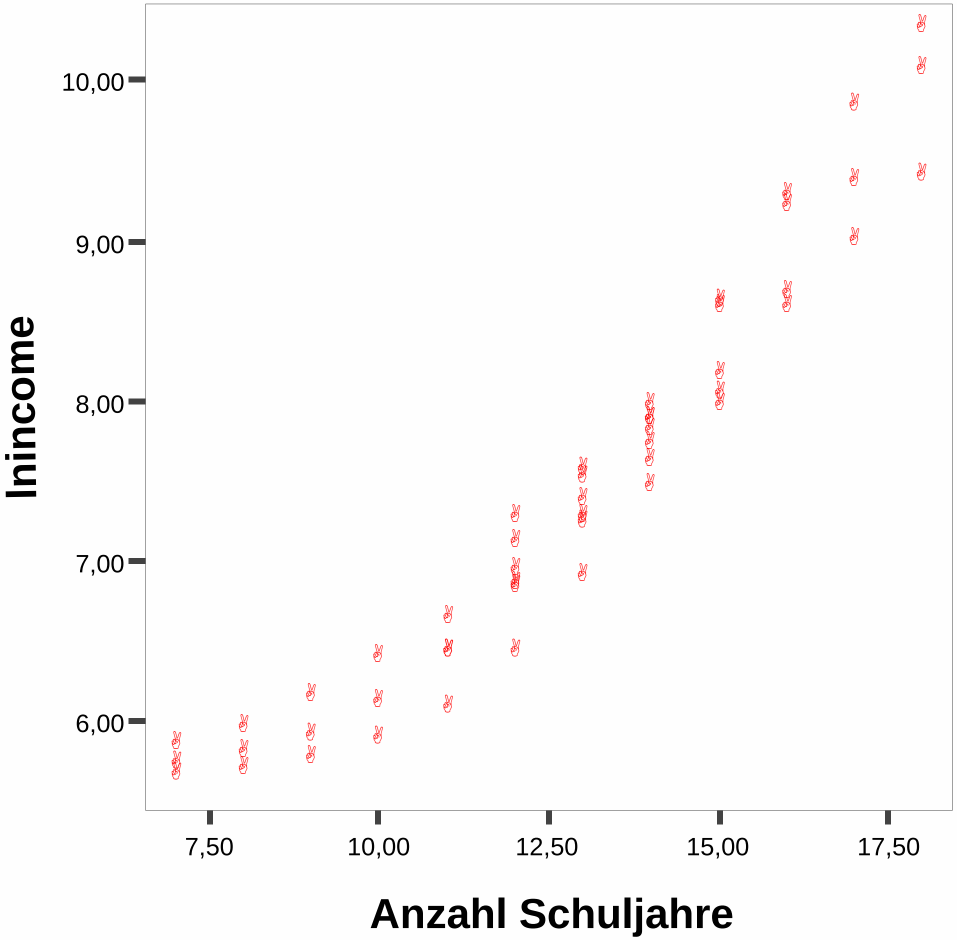
	Minimum	Maximum	Mittelwert	Standardabweichung	N
Nicht standardisierter vorhergesagter Wert	5,0930	9,5001	7,4007	1,23171	50
Nicht standardisierte Residuen	-,6827	,7995	,0000	,36465	50
Standardisierter vorhergesagter Wert	-1,874	1,704	,000	1,000	50
Standardisierte Residuen	-1,853	2,170	,000	,990	50

a. Abhängige Variable: LNINCOME

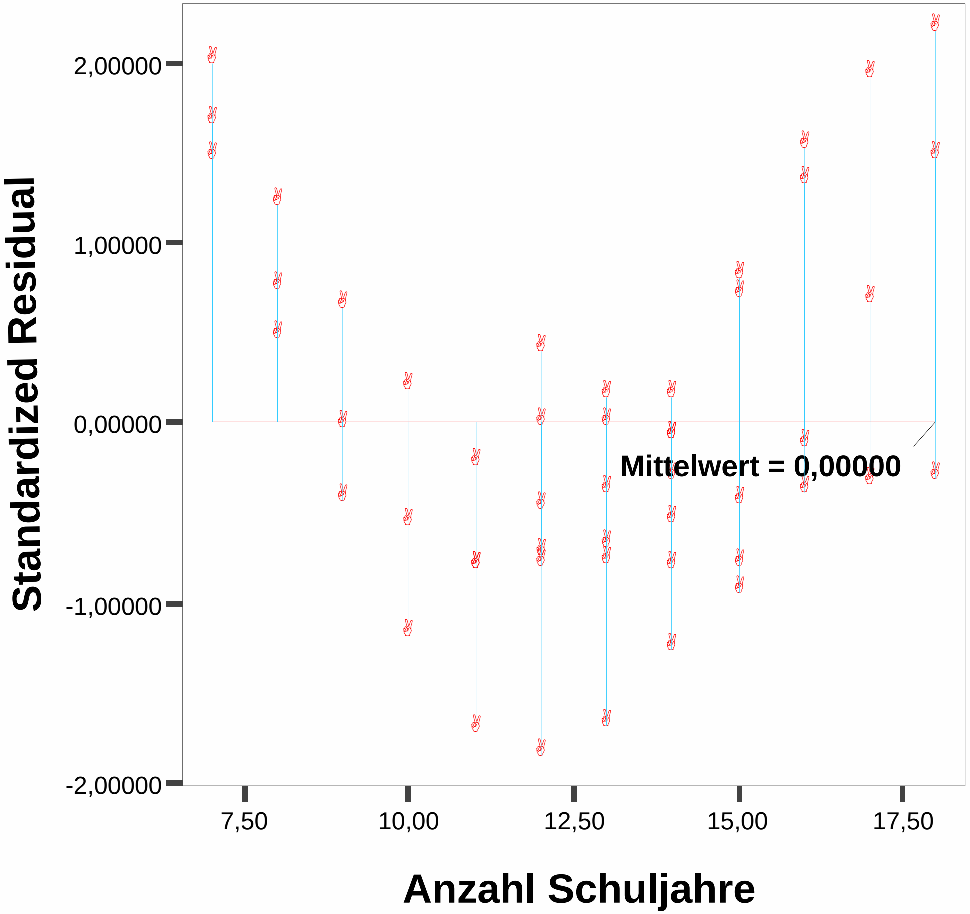


.. aber die stand. Residuen zeigen noch das Muster, erst über, dann unter, dann wieder über Null zu liegen, wenn X ansteigt

Beziehung zwischen dem *natürlichen Logarithmus* von Einkommen und Anzahl der Schuljahre ..



.. stellt in stärkerem Maße eine lineare Beziehung dar als die Ursprungsbeziehung



Mittelwert

.. aber die stand. Residuen zeigen noch das Muster, erst über, dann unter, dann wieder über Null zu liegen, wenn X ansteigt

Im Beispiel wird die lineare Form damit zu …

$$y' = \ln \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

Deshalb: Schätzung einer polynomischen Regression, in der zusätzlich zu „educ“ das Quadrat dieser Variablen, „educ_sq“ einbe-zogen wird

Durch Bildung der Ableitung* von …

$$\beta x + \gamma x^2$$

nach *x* resultiert mit ..

$$\beta + 2 \cdot \gamma x$$

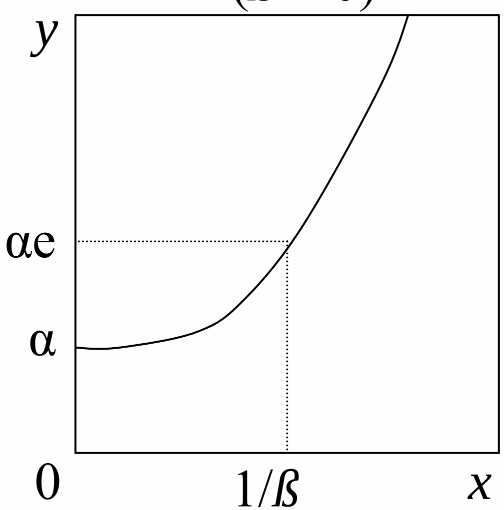
ein Ausdruck, der zeigt, wie sich der Effekt von *x* in Abhängigkeit von den Ausprägungen von *x* verändert

*[$x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$]

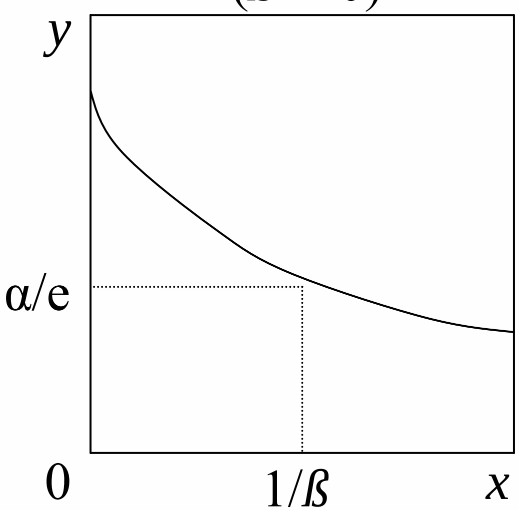
Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$

(ß > 0)



(ß < 0)



Im Beispiel wird die lineare Form damit zu …

$$y' = \ln\alpha + \beta x + \gamma x^2$$

Deshalb: Schätzung einer polynomischen Regression, in der zusätzlich zu „educ" das Quadrat dieser Variablen, „educ_sq" einbezogen wird

Durch Bildung der Ableitung* von …

$$\beta x + \gamma x^2$$

nach x resultiert mit ..

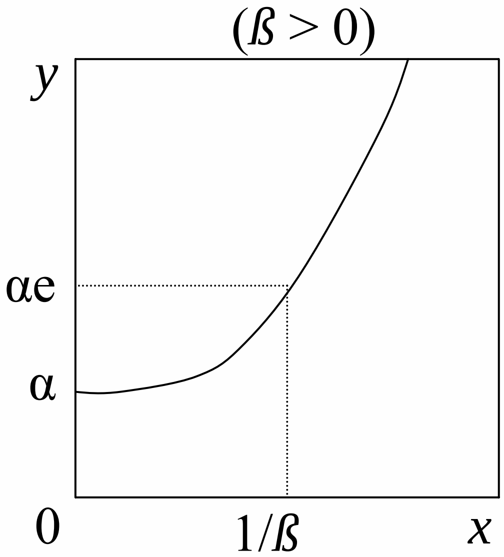
$$\beta + 2 \cdot \gamma x$$

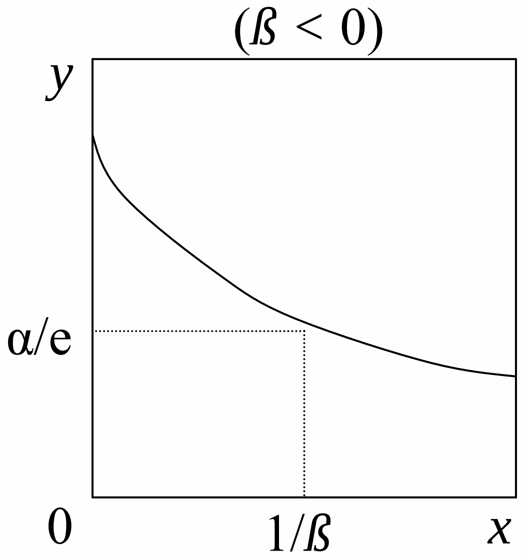
ein Ausdruck, der zeigt, wie sich der Effekt von x in Abhängigkeit von den Ausprägungen von x verändert

*[$x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$]

Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$





Lineare Modelle (Beispiele)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log x + u$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x} + u$$

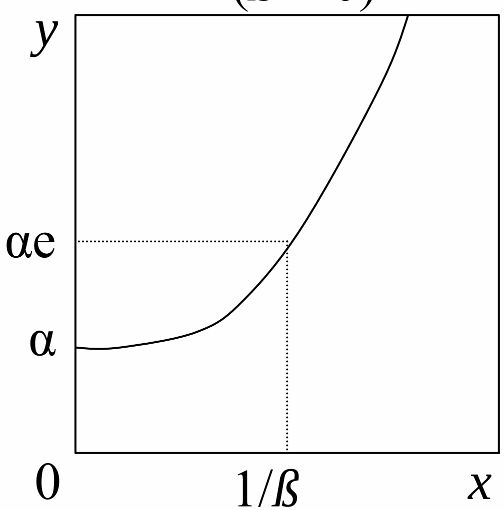
Nichtlineares Modell (Beispiel)

$$y = \beta_0 + e^{\beta_1 x} + u$$

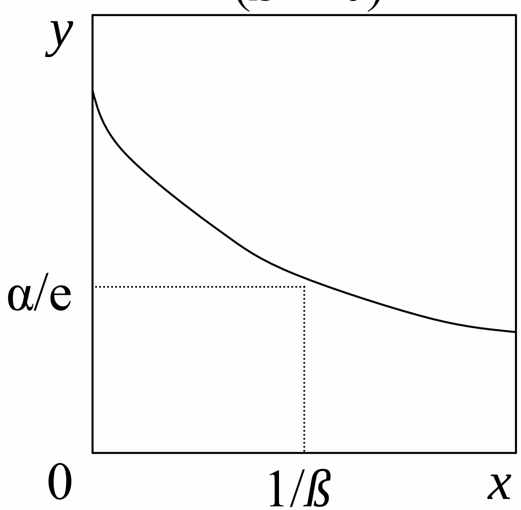
Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$

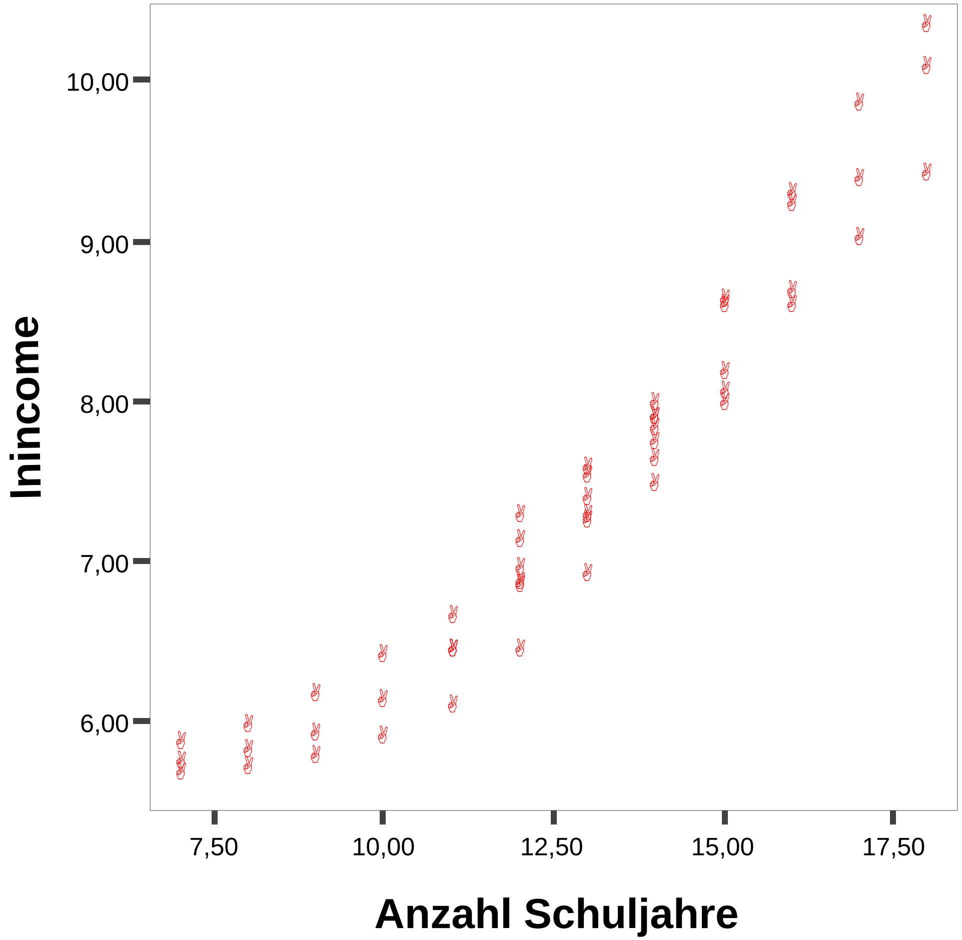
(ß > 0)



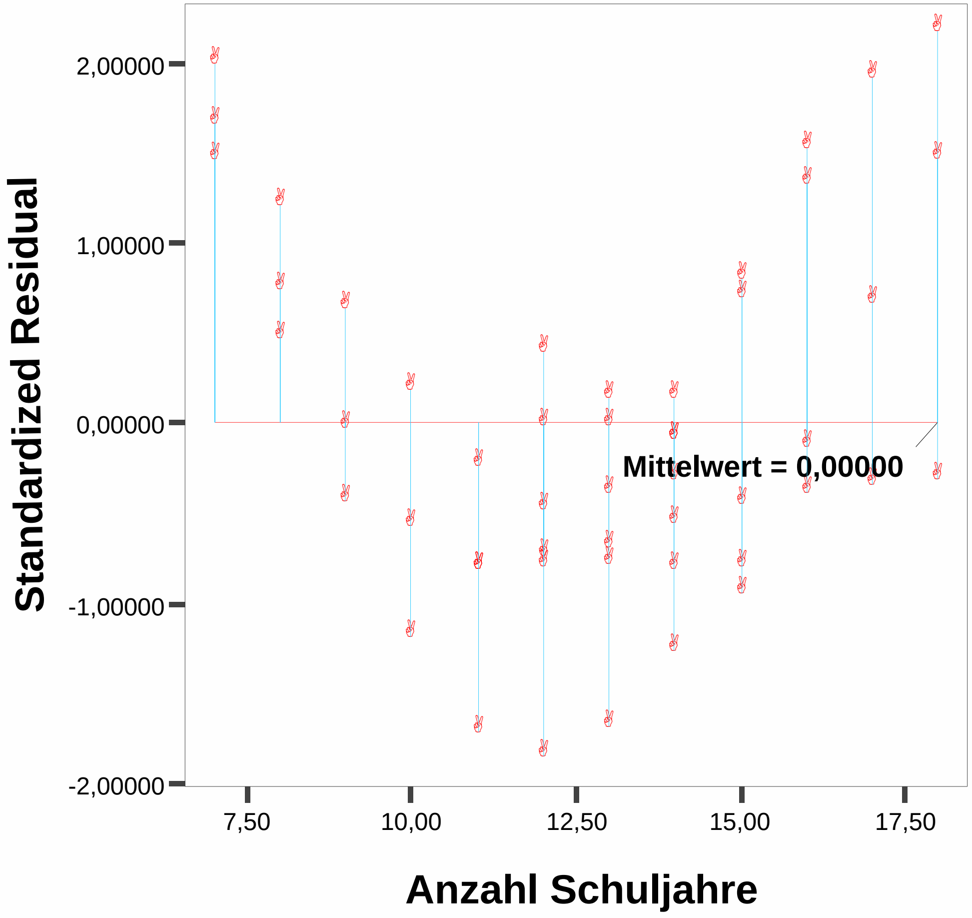
(ß < 0)



Beziehung zwischen dem *natürlichen Logarithmus* von Einkommen und Anzahl der Schuljahre ..



.. stellt in stärkerem Maße eine lineare Beziehung dar als die Ursprungsbeziehung



Mittelwert

.. aber die stand. Residuen zeigen noch das Muster, erst über, dann unter, dann wieder über Null zu liegen, wenn X ansteigt

Im Beispiel wird die lineare Form damit zu …

$$y' = \ln\alpha + \beta x + \gamma x^2$$

Deshalb: Schätzung einer polynomischen Regression, in der zusätzlich zu „educ“ das Quadrat dieser Variablen, „educ_sq“ einbe-zogen wird

Durch Bildung der Ableitung* von …

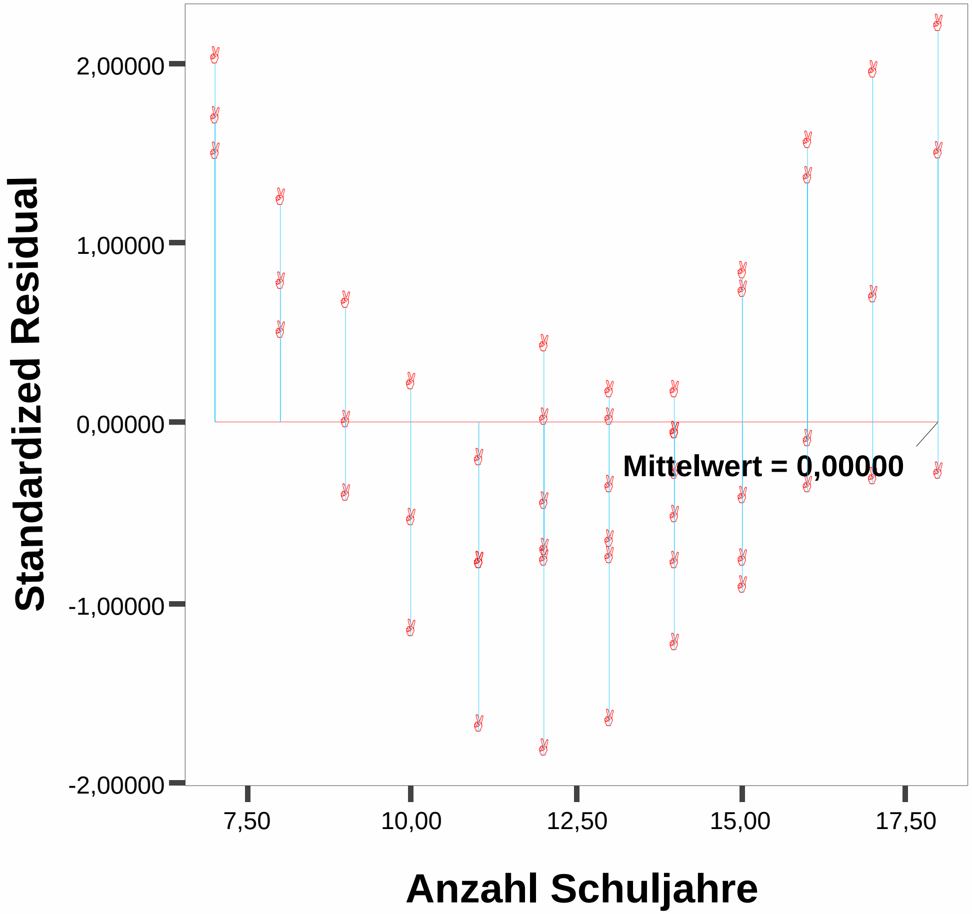
$$\beta x + \gamma x^2$$

nach *x* resultiert mit ..

$$\beta + 2 \cdot \gamma x$$

ein Ausdruck, der zeigt, wie sich der Effekt von *x* in Abhängigkeit von den Ausprägungen von *x* verändert

*[$x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$]



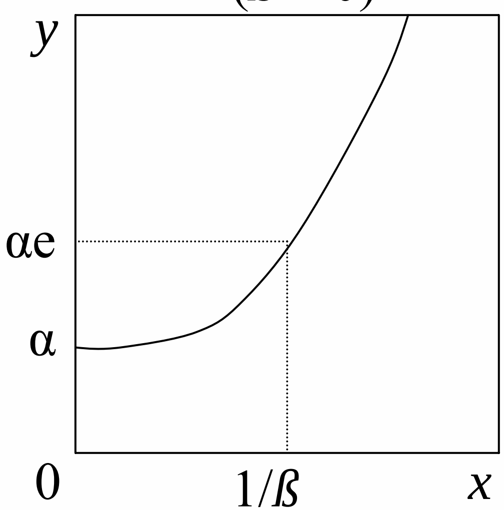
Mittelwert

.. aber die stand. Residuen zeigen noch das Muster, erst über, dann unter, dann wieder über Null zu liegen, wenn X ansteigt

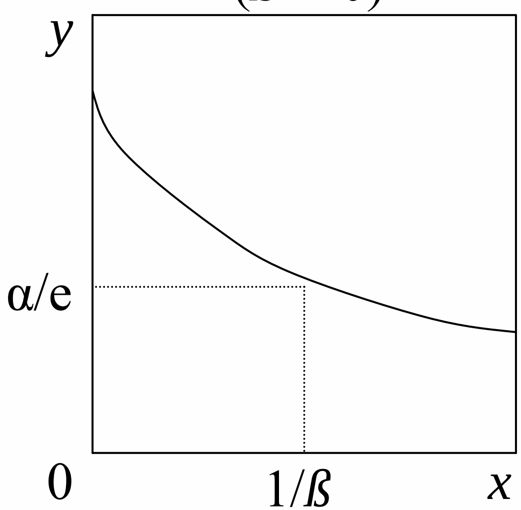
Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$

(ß > 0)



(ß < 0)



Im Beispiel wird die lineare Form damit zu …

$$y' = \ln \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

Deshalb: Schätzung einer polynomischen Regression, in der zusätzlich zu „educ“ das Quadrat dieser Variablen, „educ_sq“ einbe-zogen wird

Durch Bildung der Ableitung* von …

$$\beta x + \gamma x^2$$

nach x resultiert mit ..

$$\beta + 2 \cdot \gamma x$$

ein Ausdruck, der zeigt, wie sich der Effekt von x in Abhängigkeit von den Ausprägungen von x verändert

*[$x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$]

Modellzusammenfassung[b]

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,980[a]	,961	,959	,25984

a. Einflußvariablen : (Konstante), EDUC_SQ, EDUC Anzahl Schuljahre

b. Abhängige Variable: LNINCOME

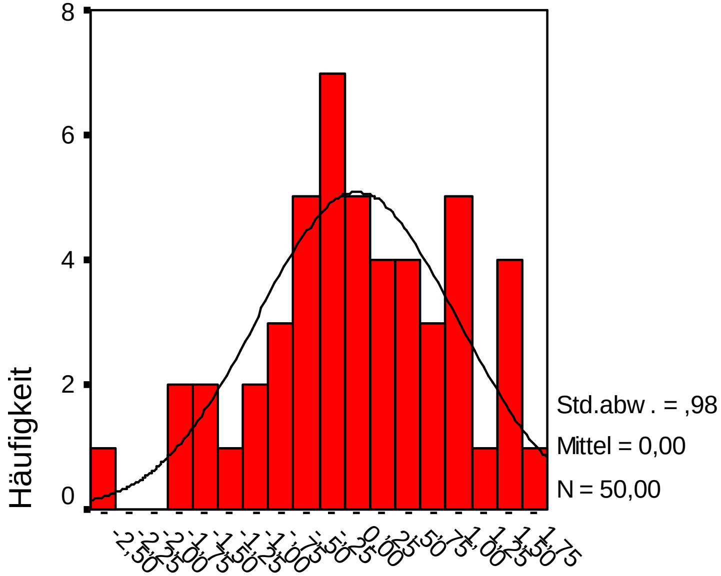
Koeffizienten[a]

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		Standardisierte Koeffizienten	T	Signifikanz
		B	Standardfehler	Beta		
1	(Konstante)	6,055	,558		10,846	,000
	EDUC Anzahl Schuljahre	-,243	,092	-,581	-2,631	,011
	EDUC_SQ	2,582E-02	,004	1,553	7,036	,000

a. Abhängige Variable: LNINCOME

Histogramm

Abhängige Variable: LNINCOME



Regression Standardisiertes Residuum

NV Annahme nochmals weniger stark verletzt;

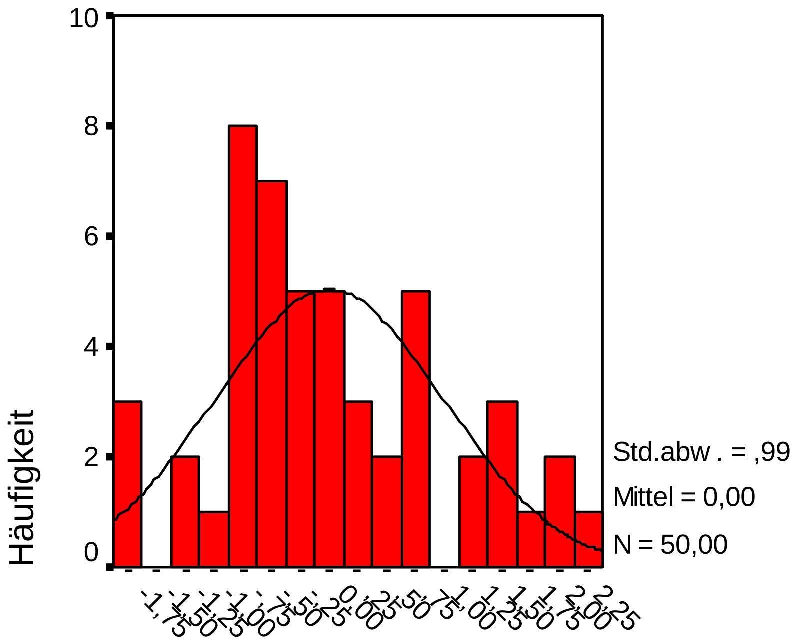
Residuenstatistik[a]

	Minimum	Maximum	Mittelwert	Standardabweichung	N
Nicht standardisierter vorhergesagter Wert	5,6212	10,0510	7,4007	1,25909	50
Nicht standardisierte Residuen	-,6667	,4802	,0000	,25448	50
Standardisierter vorhergesagter Wert	-1,413	2,105	,000	1,000	50
Standardisierte Residuen	-2,566	1,848	,000	,979	50

a. Abhängige Variable: LNINCOME

Histogramm

Abhängige Variable: LNINCOME



Regression Standardisiertes Residuum

NV Annahme ist weniger stark verletzt; stand. Residuen liegen ausgewogener um Null

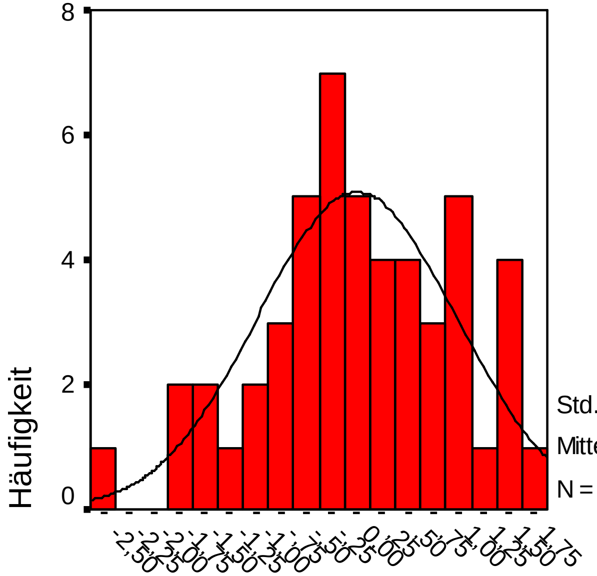
Residuenstatistik[a]

	Minimum	Maximum	Mittelwert	Standardabweichung	N
Nicht standardisierter vorhergesagter Wert	5,0930	9,5001	7,4007	1,23171	50
Nicht standardisierte Residuen	-,6827	,7995	,0000	,36465	50
Standardisierter vorhergesagter Wert	-1,874	1,704	,000	1,000	50
Standardisierte Residuen	-1,853	2,170	,000	,990	50

a. Abhängige Variable: LNINCOME

Histogramm

Abhängige Variable: LNINCOME



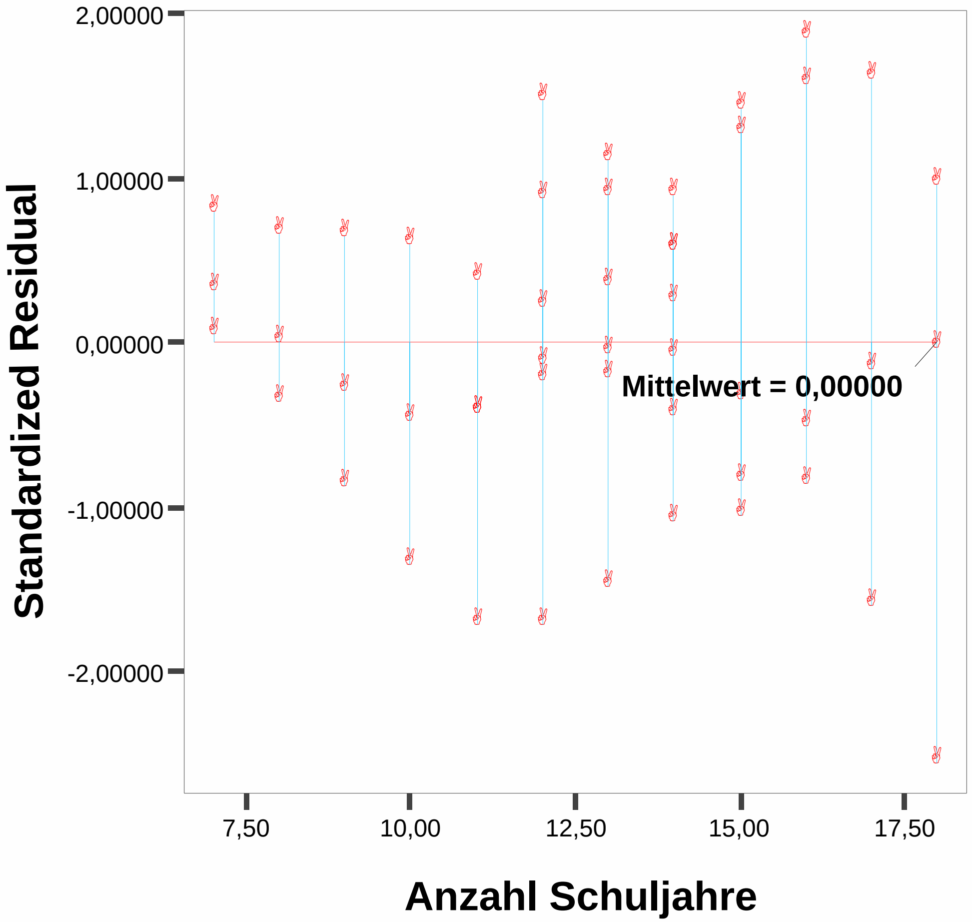
Regression Standardisiertes Residuum

NV Annahme nochmals weniger stark verletzt;

Residuenstatistik[a]

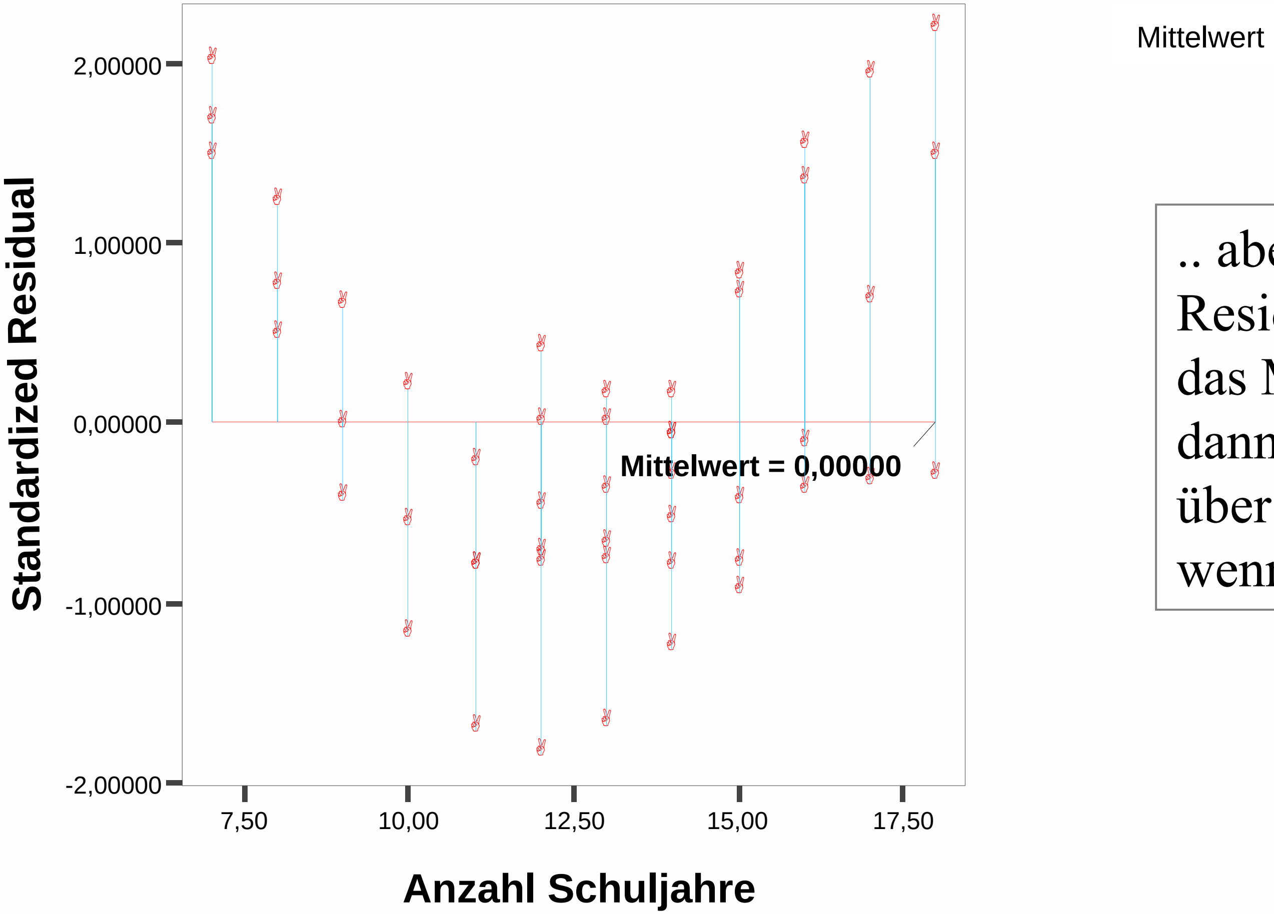
	Minimum	Maximum	Mittelwert	Standardabweichung	N
Nicht standardisierter vorhergesagter Wert	5,6212	10,0510	7,4007	1,25909	50
Nicht standardisierte Residuen	-,6667	,4802	,0000	,25448	50
Standardisierter vorhergesagter Wert	-1,413	2,105	,000	1,000	50
Standardisierte Residuen	-2,566	1,848	,000	,979	50

a. Abhängige Variable: LNINCOME

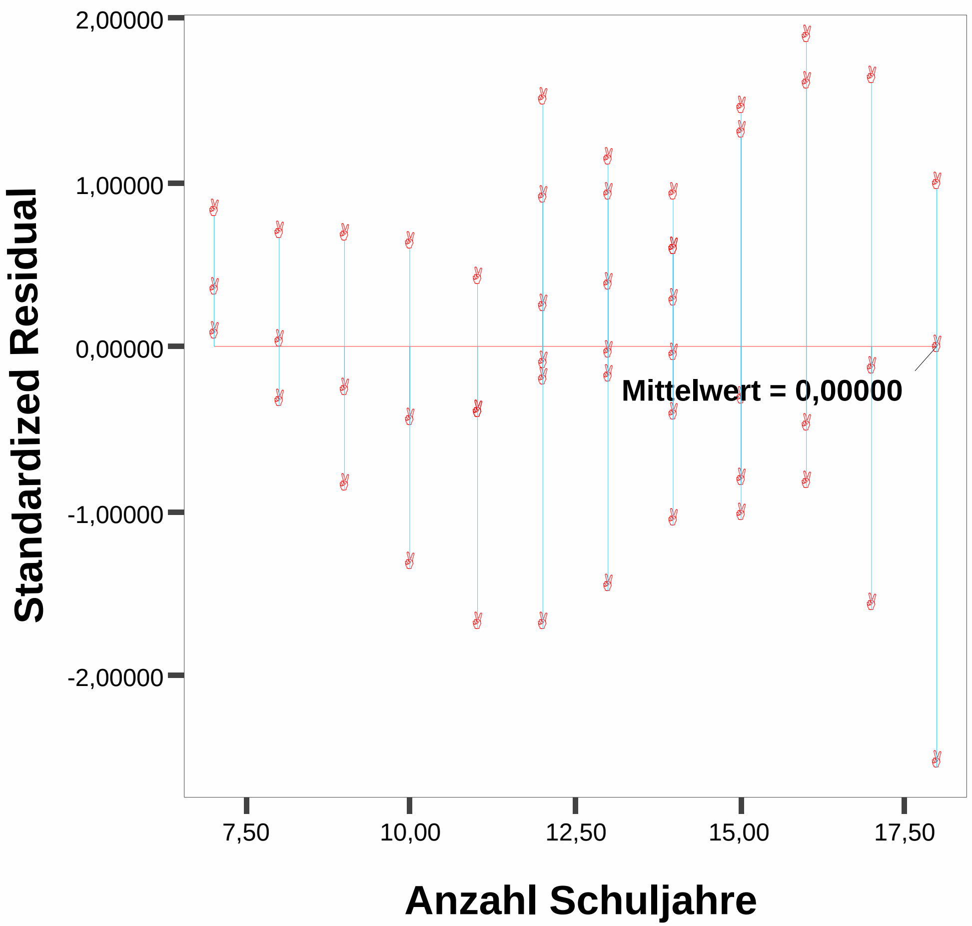


Mittelwert

.. und die stand. Residuen streuen nun ausgewogener um Null,
wenn X ansteigt



.. aber die stand. Residuen zeigen noch das Muster, erst über, dann unter, dann wieder über Null zu liegen, wenn X ansteigt



Mittelwert

.. und die stand. Residuen streuen nun ausgewogener um Null,
wenn X ansteigt

$$y' = \ln \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$y' = 6{,}055 - 0{,}243x + 0{,}026x^2$$

$$y = \alpha \cdot e^{(\beta x + \gamma x^2)} = \alpha \cdot e^{ßx} \cdot e^{\gamma x^2}$$

$$y = 426{,}2 \cdot e^{(-0{,}243x + 0{,}026x^2)} = 426{,}2 \cdot e^{-0{,}243x} \cdot e^{0{,}026x^2}$$

Modellzusammenfassung[b]

Modell	R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler des Schätzers
1	,980[a]	,961	,959	,25984

a. Einflußvariablen : (Konstante), EDUC_SQ, EDUC Anzahl Schuljahre

b. Abhängige Variable: LNINCOME

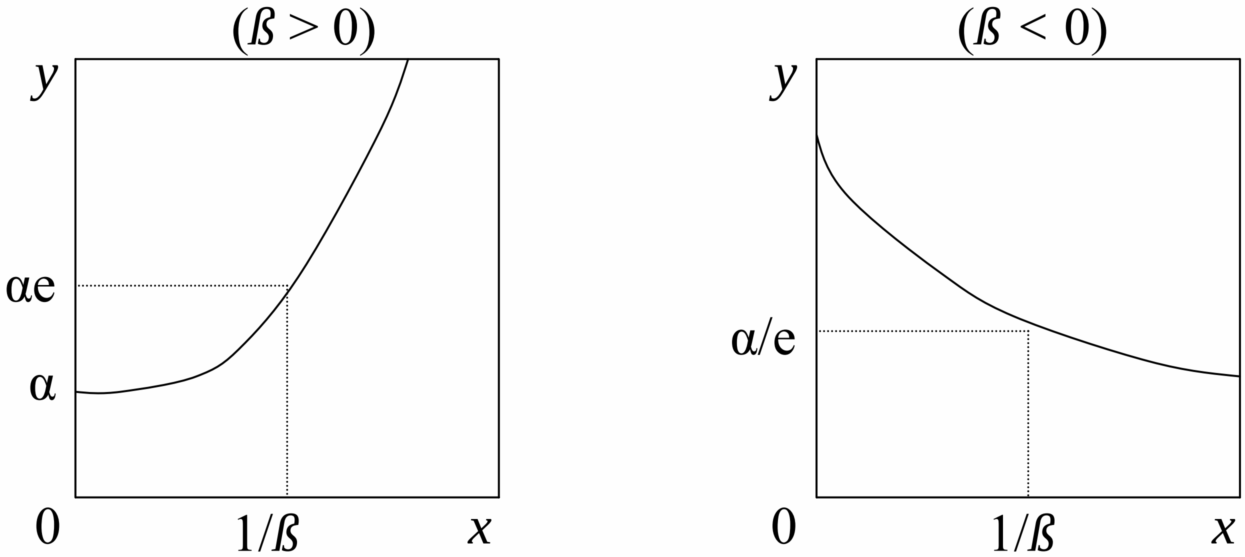
Koeffizienten[a]

Modell		Nicht standardisierte Koeffizienten		Standardisierte Koeffizienten	T	Signifikanz
		B	Standardfehler	Beta		
1	(Konstante)	6,055	,558		10,846	,000
	EDUC Anzahl Schuljahre	-,243	,092	-,581	-2,631	,011
	EDUC_SQ	2,582E-02	,004	1,553	7,036	,000

a. Abhängige Variable: LNINCOME

Linearisierbare Funktionen (Beispiel 4)

Funktion	Transformation	Lineare Form
$y = \alpha \cdot e^{\beta x}$	$y' = \ln y$	$y' = \ln \alpha + \beta x$



$$y' = \ln\alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$y' = 6{,}055 - 0{,}243x + 0{,}026x^2$$

$$y = \alpha \cdot e^{(\beta x + \gamma x^2)} = \alpha \cdot e^{ßx} \cdot e^{\gamma x^2}$$

$$y = 426{,}2 \cdot e^{(-0{,}243x + 0{,}026x^2)} = 426{,}2 \cdot e^{-0{,}243x} \cdot e^{0{,}026x^2}$$

Bildung	7	8	9	10	11	12	13	14	15	..
Einkom.	278	322	393	505	684	976	1465	2319	3866	..
Diff.		44	71	112	179	292	489	854	1547	..