

Regression mit fixen Effekten

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + e_i \quad i = 1, \dots, n \quad (0)$$

Regression mit Zufallseffekten

$$y_{ij} = b_{0j} + b_{1j} x_{1ij} + e_{ij} \quad i = 1, \dots, n_j \quad (1)$$
$$j = 1, \dots, N$$

Level-1 Gl.

$$y_{ij} = b_{0j} + b_{1j}x_{1ij} + e_{ij} \quad (1)$$

Level-2 Gl.

$$b_{0j} = b_0 + u_{0j} \quad j = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$b_{1j} = b_1 + u_{1j} \quad j = 1, \dots, N \quad (3)$$

Einsetzen von (2) und (3) in (1), erbringt

$$y_{ij} = (b_0 + u_{0j}) + (b_1 + u_{1j})x_{1ij} + e_{ij}$$

bzw.,

$$y_{ij} = \underbrace{b_0 + b_1 x_{1ij}}_{\text{Fixed Part}} + \underbrace{u_{0j} + u_{1j} x_{1ij}}_{\text{Random Part}} + e_{ij} \quad (4)$$

Fixed Part

Random Part

Annahmen,

e_{ij} u_{0j} u_{1j} Zufallsvariablen

$$E(e_{ij}) = 0 \qquad \text{var}(e_{ij}) = \sigma^2$$

$$e_{ij} \approx N(0, \sigma^2)$$

Normalverteilt mit Mittelwert gleich Null und homogener (konstanter) Varianz; unkorreliert

Varianzkomponenten

$$\text{var}(u_{0j}) = \tau_0^2$$

$$\text{var}(u_{1j}) = \tau_1^2$$

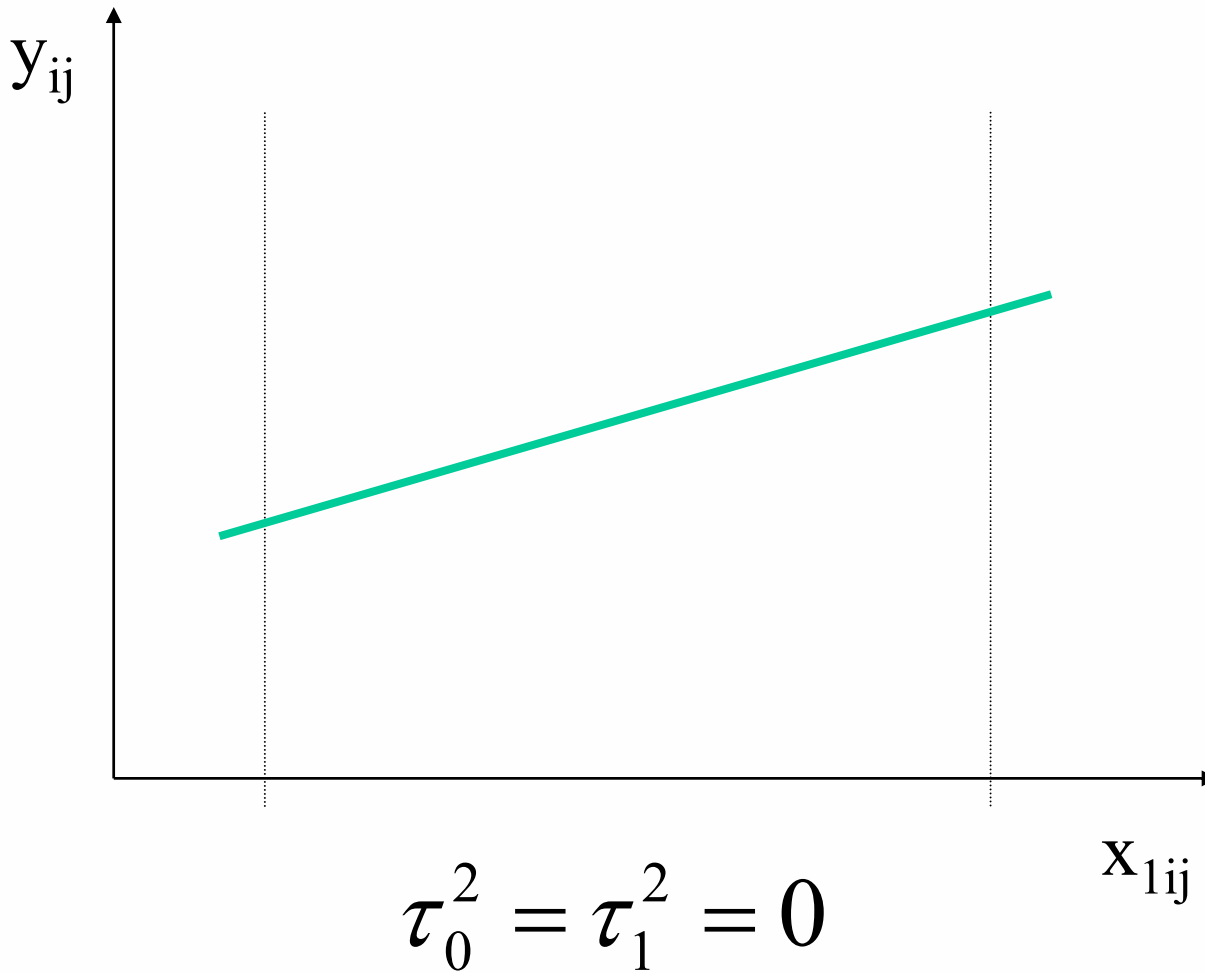
$$\text{cov}(u_{0j}, u_{1j}) = \tau_{01}$$

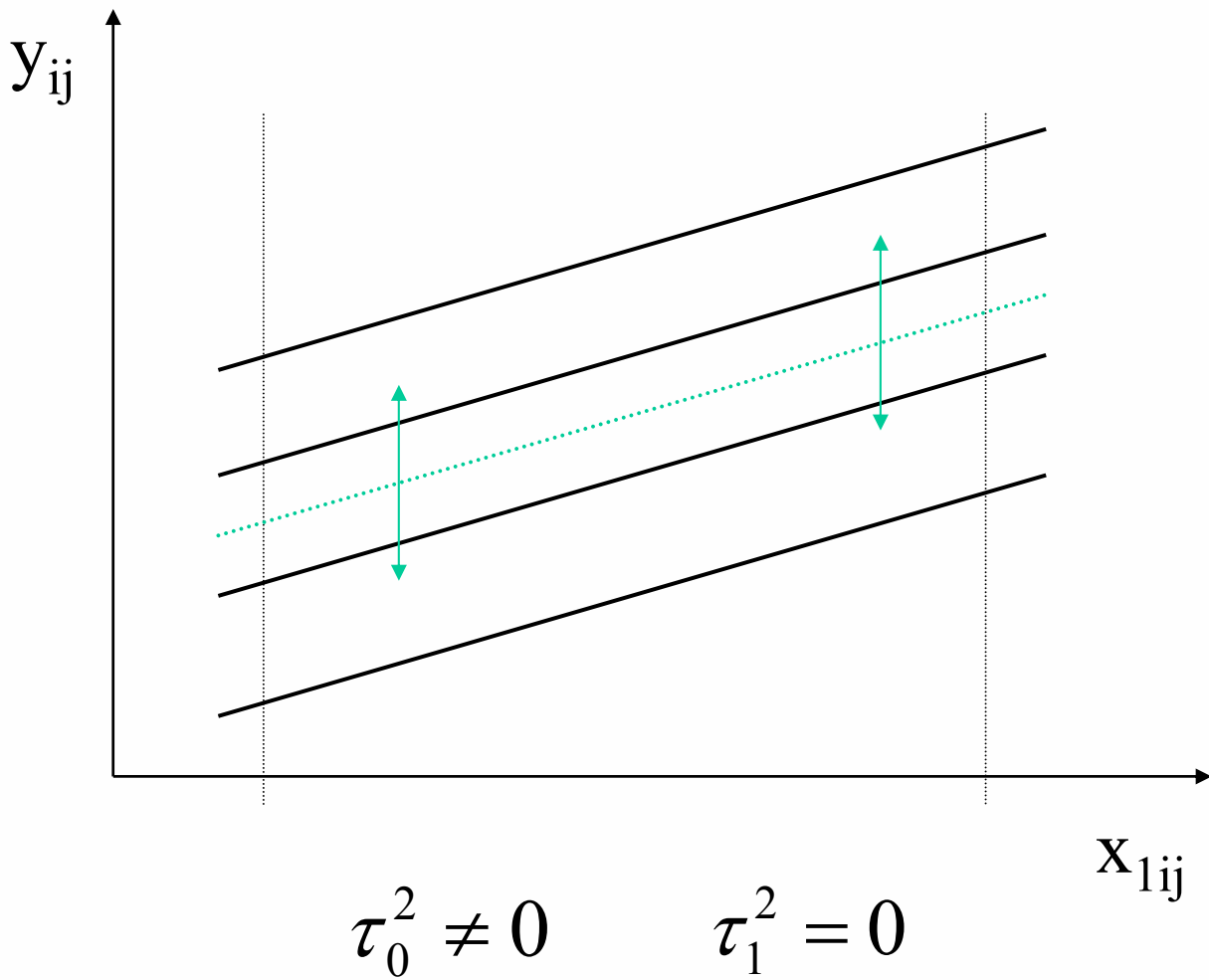
$$E(u_{0j}) = E(u_{1j}) = 0$$

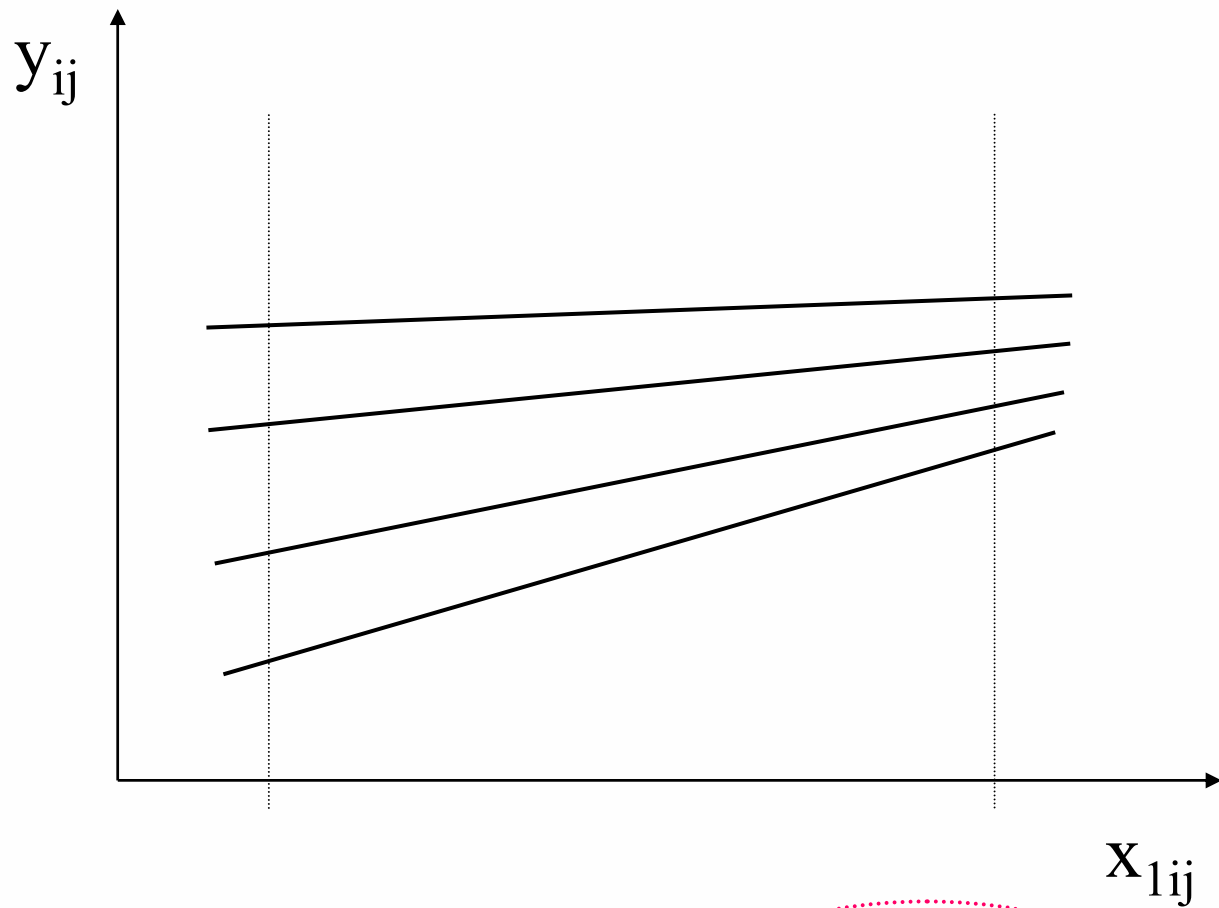
$$E(b_{0j}) = b_0$$

$$E(b_{1j}) = b_1$$

$$\text{cov}(u_{0j}, e_{ij}) = \text{cov}(u_{1j}, e_{ij}) = 0$$



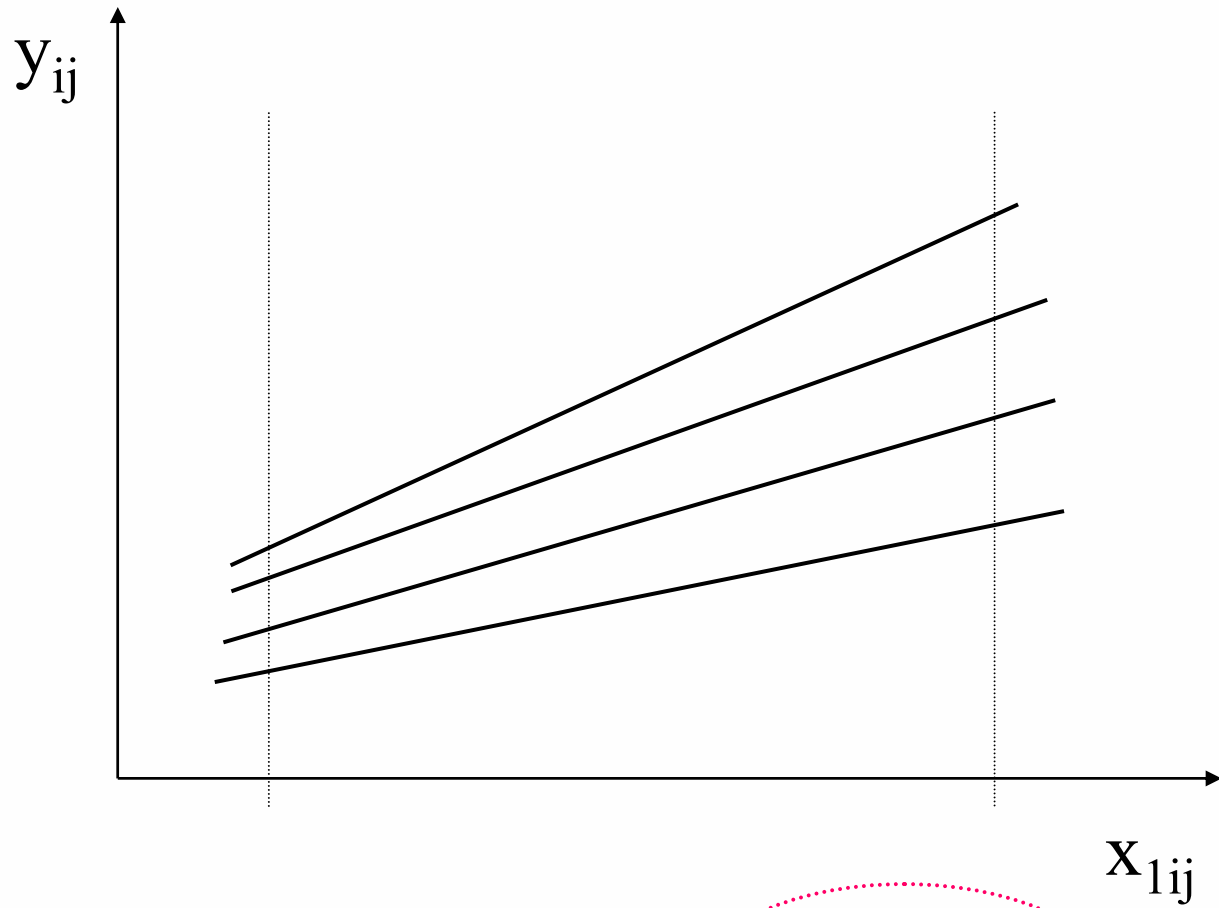




$$\tau_0^2 \neq 0$$

$$\tau_1^2 \neq 0$$

$$\tau_{01} < 0$$



$$\tau_0^2 \neq 0$$

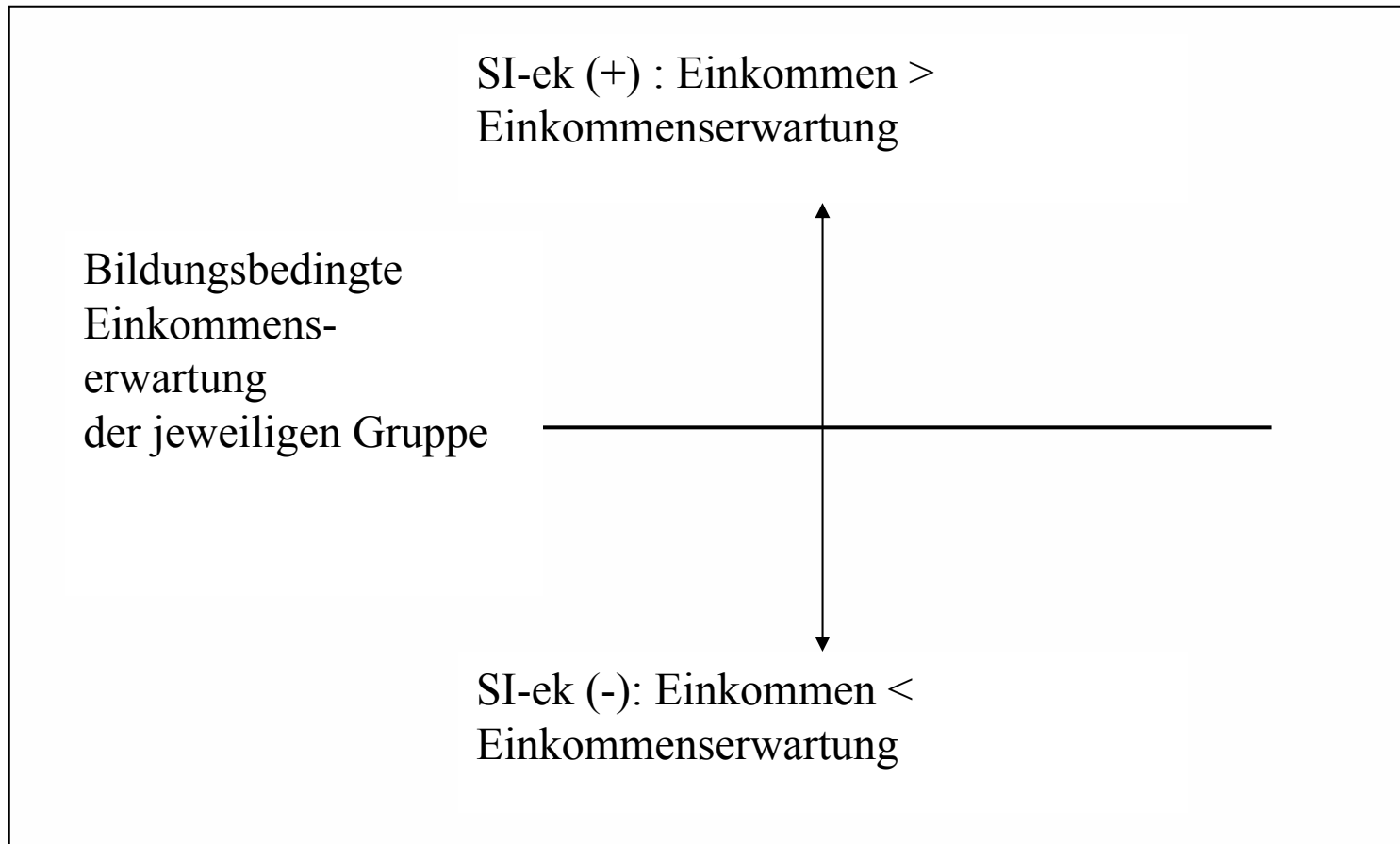
$$\tau_1^2 \neq 0$$

$$\tau_{01} > 0$$

Beispiel

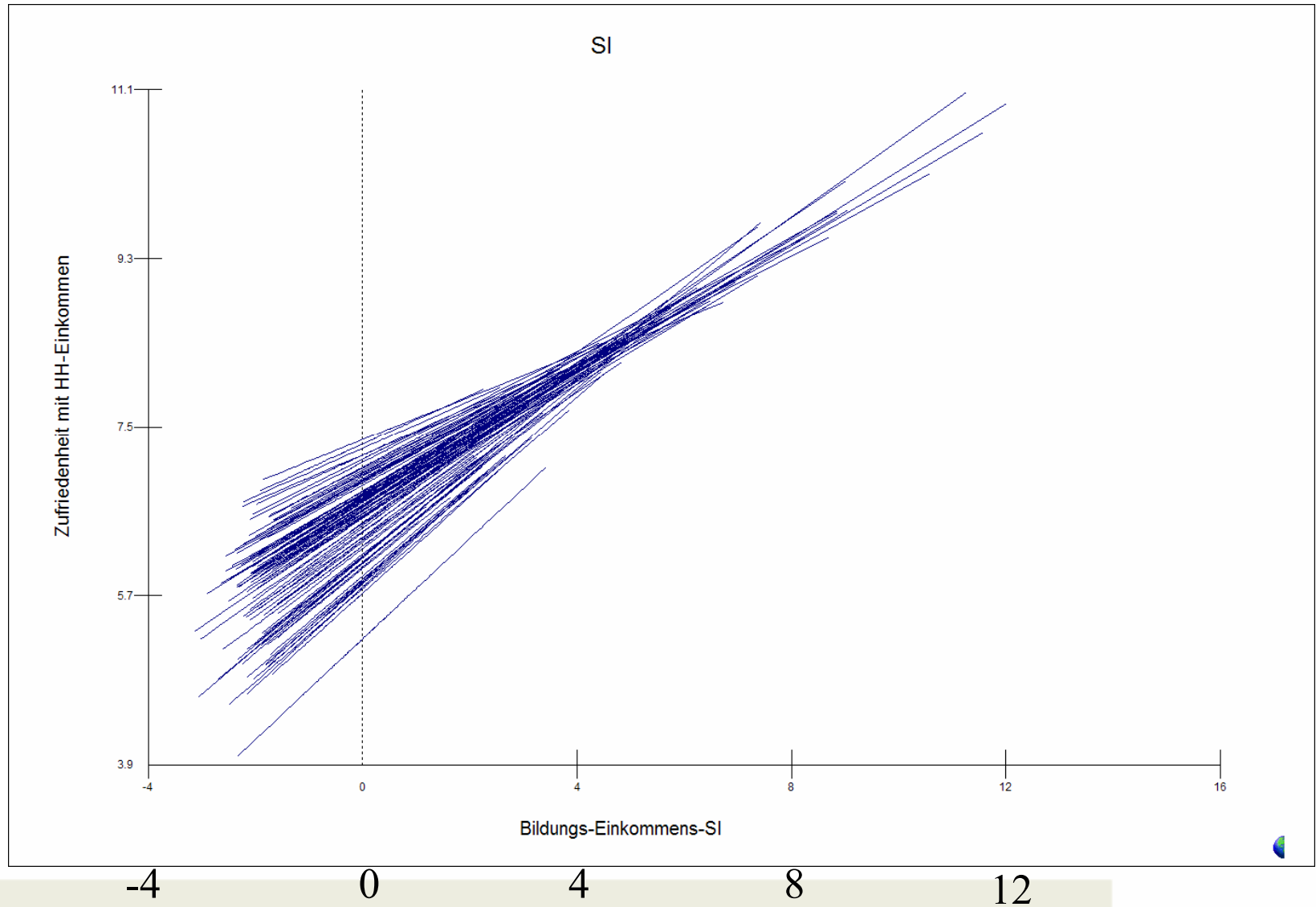
- Zufriedenheit mit dem Haushaltseinkommen (Skala von 1,2, ..., 11) und
- Bildungs-Einkommens-Statusinkonsistenz (-3, ..., 0, ..., 12)
- SOEP, Welle für 2001
- N=17.154 Personen
- 97 Regionen

Bildungs-Einkommens-Statusinkonsistenz



11.1

3,9



Zufriedenheit mit HH-Einkommen und Bildungs-Einkommens-SI
(SOEP-Daten, 2001er Welle, N=17.154)

PARAMETER			ESTIMATE	S. ERROR(U)	
cons			6.548	0.04934	
si-ek			0.3787	0.01933	
LEV.	PARAMETER		ESTIMATE	S. ERROR(U)	CORR.

2	cons	/cons	0.2008	0.03378	1
2	si-ek	/cons	-0.03281	0.009829	-0.816
2	si-ek	/si-ek	0.008057	0.004453	1

1	cons	/cons	4.484	0.04864	
-2*log(lh) is			74630.9		

Full Model

$$\text{rp0104}_{ij} \sim N(XB, \Omega)$$

$$\text{rp0104}_{ij} = \beta_{0ij} \text{cons} + \beta_{1j} \text{si-ek}_{ij}$$

$$\beta_{0ij} = 6,548(0,049) + u_{0j} + e_{0ij}$$

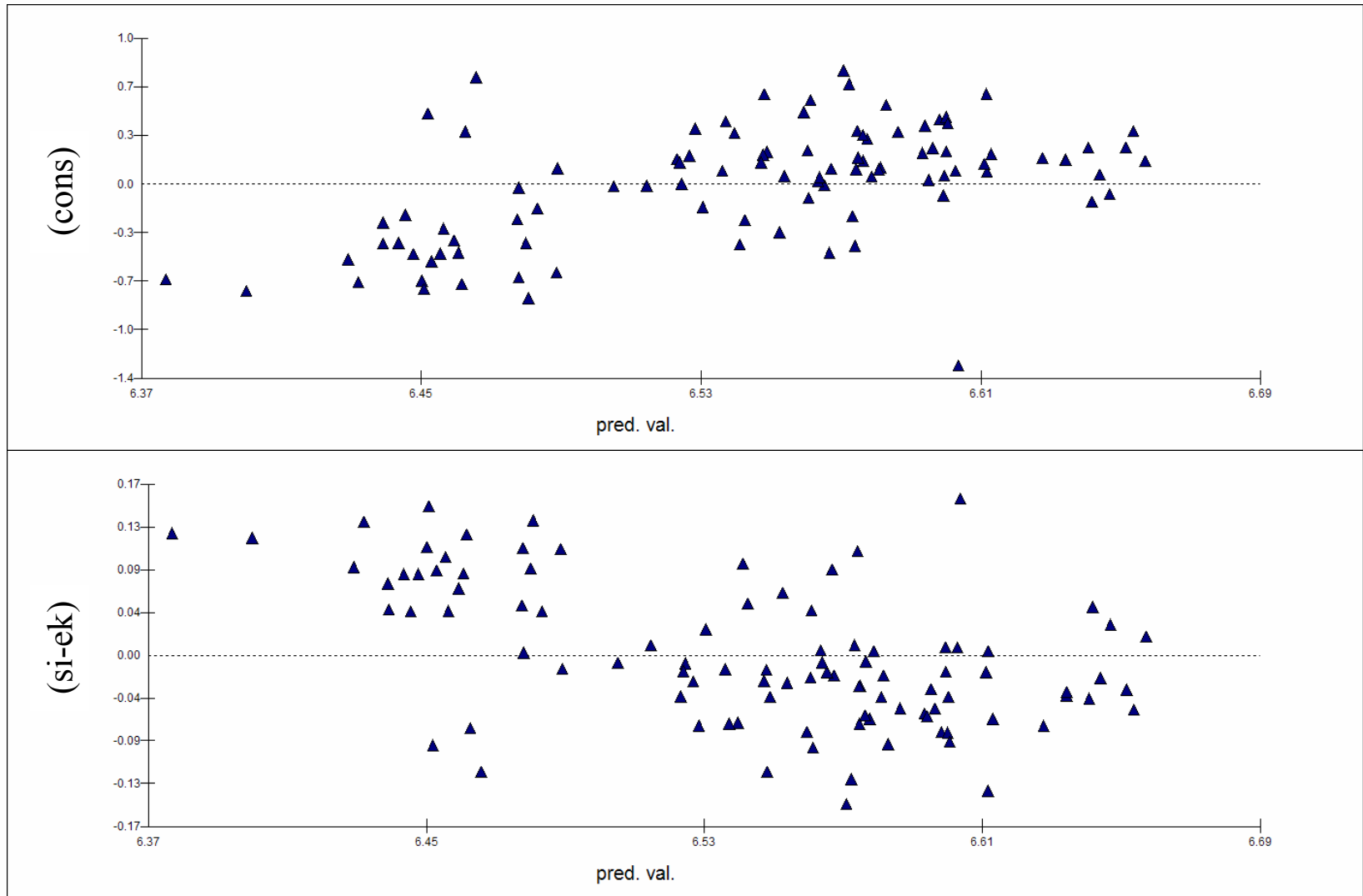
$$\beta_{1j} = 0,379(0,019) + u_{1j}$$

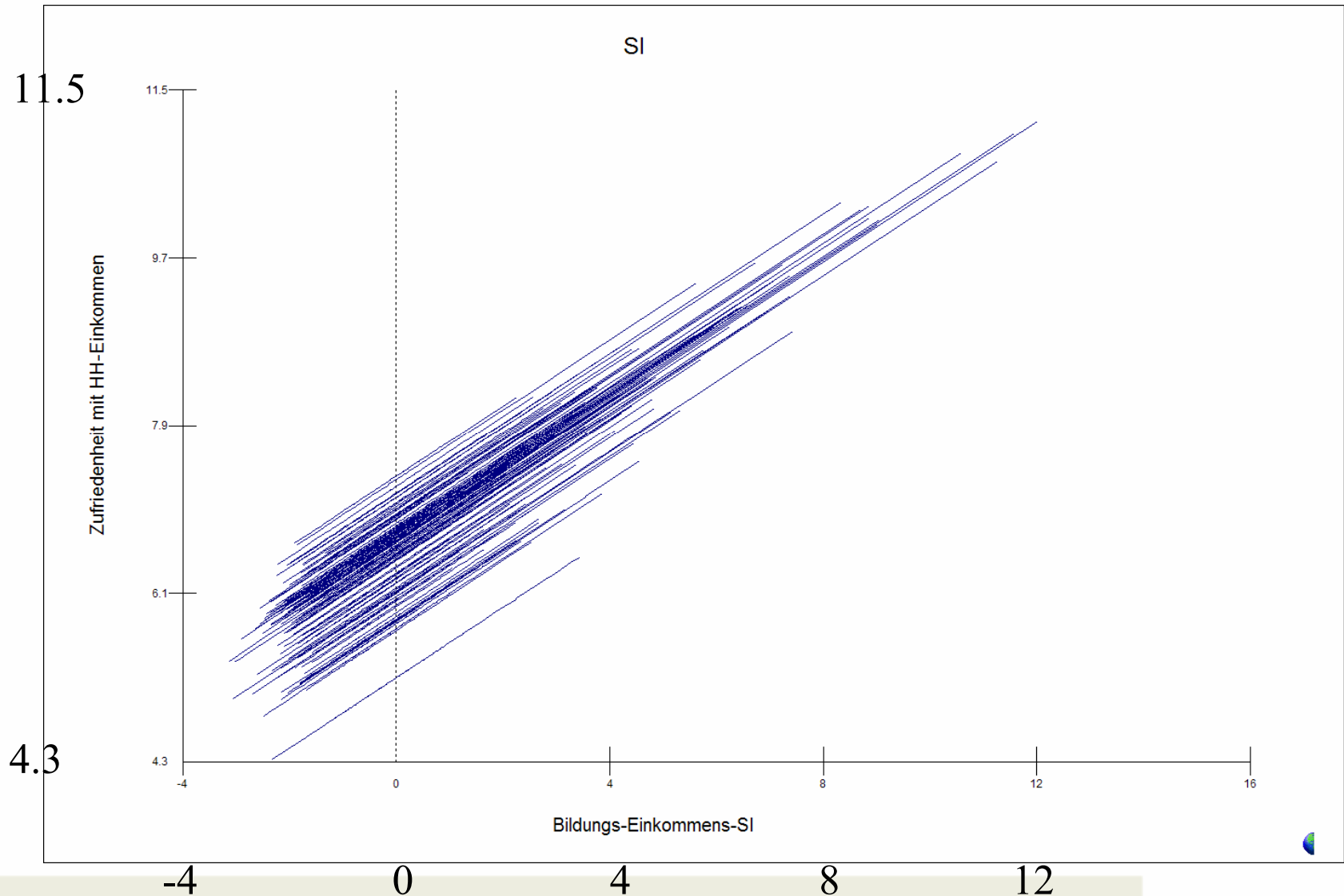
$$\begin{bmatrix} u_{0j} \\ u_{1j} \end{bmatrix} \sim N(0, \Omega_u) : \Omega_u = \begin{bmatrix} 0,201(0,034) \\ -0,033(0,010) & 0,008(0,004) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim N(0, \Omega_e) : \Omega_e = \begin{bmatrix} 4,484(0,049) \end{bmatrix}$$

$$-2 * \text{loglikelihood(IGLS Deviance)} = 74630,940(17154 \text{ of } 17154 \text{ cases in use})$$

Stand. Residuen





PARAMETER			ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons			6.539	0.04982
si-ek			0.3759	0.01651
->rand				
LEV.	PARAMETER		ESTIMATE	S. ERROR(U)

2	cons	/cons	0.2052	0.03446

1	cons	/cons	<u>4.491</u>	0.04863
			<u>Σ 4.6962</u>	
-2*log(lh) is			74645.7	

Restricted Model

Varianzzerlegung – Empty Model

Zufriedenheit mit HH-Einkommen
(SOEP-Daten, 2001er Welle, N=17.154 Personen aus
97 Regionen)

PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons	6.536	0.05373

LEV.	PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
2	cons /cons	0.2432 5.0%	0.04013
1	cons /cons	4.623 95.0%	0.05006
		<u>Σ 4.8662</u>	
-2*log(lh) is		75156.1	Empty Model

$$rp0104_{ij} \sim N(XB, \Omega)$$

$$rp0104_{ij} = \beta_{0ij} \text{cons}$$

$$\beta_{0ij} = 6,536(0,054) + u_{0j} + e_{0ij}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0j} \end{bmatrix} \sim N(0, \Omega_u) : \Omega_u = \begin{bmatrix} 0,243(0,040) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{0ij} \end{bmatrix} \sim N(0, \Omega_e) : \Omega_e = \begin{bmatrix} 4,623(0,050) \end{bmatrix}$$

$$-2 * \text{loglikelihood(IGLS Deviance)} = 75156,090(17154 \text{ of } 17154 \text{ cases in use})$$

Deviance Test	$-2 \cdot \log(\text{lh})$	Δ	$\Delta(\text{df})$
Full Model	74.630,9		
Restricted Model	74.645,7	14,8	2
.....			
Empty Model	75.156,1	510,4	1

$$\frac{4,8662 - 4,6962}{4,8662} = 0,035 \quad [3,5\% \text{ erklärte Varianz}]$$

Level-1 Gl.

$$y_{ij} = b_{0j} + b_{1j}x_{1ij} + e_{ij} \quad (1)$$

Level-2 Gl.

$$b_{0j} = \underline{b_0} + u_{0j} \quad j = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$b_{1j} = \underline{b_1} + u_{1j} \quad j = 1, \dots, N \quad (3)$$

Level-1 Gl.

$$y_{ij} = b_{0j} + b_{1j}x_{1ij} + e_{ij} \quad (5)$$

Level-2 Gl.

$$b_{0j} = b_0 + x_{2j} + u_{0j} \quad (6)$$

$$b_{1j} = b_1 + x_{2j} + u_{1j} \quad (7)$$

Level-1 Gl.

$$y_{ij} = b_{0j} + b_{1j}x_{1ij} + e_{ij} \quad (5)$$

Level-2 Gl.

$$b_{0j} = b_0 + b_{20}x_{2j} + u_{0j} \quad (6)$$

$$b_{1j} = b_1 + b_{21}x_{2j} + u_{1j} \quad (7)$$

$$b_{0j} = b_0 + b_{20}x_{2j} + u_{0j}$$

$$b_{1j} = b_1 + u_{1j}$$

$$y_{ij} = b_0 + b_1x_{1ij} + b_{20}x_{2j} + u_{0j} + u_{1j}x_{1ij} + e_{ij}$$

Variante I

$$b_{0j} = b_0 + u_{0j}$$

$$b_{1j} = b_1 + b_{21}x_{2j} + u_{1j}$$

$$y_{ij} = b_0 + b_1x_{1ij} + \underline{b_{21}x_{2j}x_{1ij}} + u_{0j} + u_{1j}x_{1ij} + e_{ij}$$

Variante II

$$b_{0j} = b_0 + b_{20}x_{2j} + u_{0j}$$

$$b_{1j} = b_1 + b_{21}x_{2j} + u_{1j}$$

$$y_{ij} = b_0 + b_1x_{1ij} + \underline{b_{20}x_{2j}} + \underline{b_{21}x_{2j}x_{1ij}} + u_{0j} + u_{1j}x_{1ij} + e_{ij}$$

Variante III

	Absolute Eig.	Eigenschaften, basierend auf ...		
		Verteilung	Struktur	Inklusion
Ebene n (Mitglieder eines Aggregats)	absolut	komparativ	relational	kontex- tuell
Ebene n +1 (Aggregat)	global	analytisch	strukturell	

Zufriedenheit mit HH-Einkommen; Datenbasis: SOEP, Welle für 2001

PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons	6.536	0.05373

LEV.	PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)

2	cons /cons	0.2432	0.04013

1	cons /cons	4.623	0.05006
		<u><u>Σ 4.8662</u></u>	
-2*log(lh)	is	75156.1	

Zufriedenheit mit HH-Einkommen und Bildung

PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons	5.077	0.09528
educ	0.1254	0.006661

LEV.	PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)

2	cons /cons	0.2615	0.04269

1	cons /cons	4.528	0.04903
		<u>Σ 4.7895</u>	

-2*log(lh) is 74805.6

Erweiterung um **mittleren** Bildungsstatus der **Regionen**

PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons	9.428	1.291
educ	0.1266	0.006672
av-educ	-0.3751	0.1111

LEV.	PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
2	cons /cons	0.2291	0.03797
1	cons /cons	4.528	0.04903

$\Sigma 4.7571$

$-2 \cdot \log(lh)$ is 74794.8

Erweiterung um mittleres Bildungsgefälle der Regionen

PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons	12.44	1.233
educ	0.1266	0.006673
av-educ	-0.8534	0.1276
sd-educ	1.087	0.1926

LEV.	PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)

2	cons /cons	0.1618	0.02795

1	cons /cons	4.528	0.04903
		<u><u>Σ 4.6898</u></u>	
-2*log(lh) is		74767.7	

Erklärte Varianz

Anwendung von ..
$$\frac{\sigma_{(M0)}^2 - \sigma_{(M1)}^2}{\sigma_{(M0)}^2}$$

auf ... $\sigma_e^2 + \sigma_{u0}^2$ für Gesamtvarianz

auf ... $\frac{\sigma_e^2}{n} + \sigma_{u0}^2$ für Ebene 2

Berechnung von n
durch das harmonische Mittel
(N = Anzahl der Level-2 Einheiten)

$$N / \left\{ \sum_j (1/n_j) \right\}$$

Relative Effektstärken

PARAMETER	ESTIMATE	-> Standard.Eff.
cons	12.44	
educ	0.1266	1,124
av-educ	-0.8534	-0,1795
sd-educ	1.087	0,1438

$$b^* = b \cdot \frac{s_x}{s_y}$$

$$b_1^* = 0,1266 \cdot \frac{2,4788}{2,2050} = 1,124$$

$$b_2^* = -0,8534 \cdot \frac{0,46372}{2,2050} = -0,1795$$

N=17.154	Mean	s.d.
Zufriedenheit mit HH-EK	6.5001	2.2050
educ	11.732	2.4788
av-educ	11.732	0.46372
sd-educ	2.4174	0.29168
clw-educ	137.86	30.733

PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)
cons	9.679	2.344
educ	0.367	0.174
av-educ	-0.6185	0.2121
sd-educ	1.084	0.1928
clw-educ	-0.02036	0.01474

LEV.	PARAMETER	ESTIMATE	S. ERROR(U)

2	cons /cons	0.1623	0.02803

1	cons /cons	4.528	0.04903

-2*log(lh) is 74765.8

(mit Cross-Level Wechselwirkung;
wie Variante III, aber ohne u_{1j})