Prof. Dr. Ivo Mossig
Institut für Geographie
Tel: 0421 / 218 67410
ivo.mossig@uni-bremen.de

Dipl.-Geogr. Lars Schieber
Institut für Geographie
Tel: 0421 / 218 67113
lars.schieber@uni-bremen.de

# Deskriptive Statistik

WS2009/10

## III Induktive Statistik: Schätzen und Testen

7 Anwendung bestimmter theoretischer Verteilungen

# 1. Beispiel für Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Von einem Fluss sind langjährig die Pegelstände gemessen worden. Aus diesen Daten lässt sich nun der mittlere Pegel (arithmetisches Mittel) und die mittlere Schwankung der Pegelstände (Standardabweichung) berechnen.
Zum Schutz vor Überschwemmungen wurde die Eindeichung des Flusses beschlossen, wobei die Höhe des Deiches diskutiert wird:

Einerseits soll der Deich so hoch sein, dass das Überschwemmungsrisiko gering und die Schutzfunktion des Deiches gewährleistet ist.
Andererseits sollen die Kosten für den Deichbau so niedrig wie möglich sein.

Gesucht wird ein Kompromiss, der ein gewisses Überschwemmungsrisiko toleriert

Angenommen man einigt sich auf eine 99%ige Sicherheit.
Das heißt, dass 99% der bisherigen Jahreshöchststände unterhalb der Deichkrone bleiben und nur ein so genanntes Jahrhundertereignis, das einmal in 100 Jahren auftritt, würde zur Überschwemmung führen.

Mit Hilfe der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** lässt sich aus dem Daten der Messreihe berechnen, welche Höhe des Deiches diesen 99%igen Schutz gewährleistet.

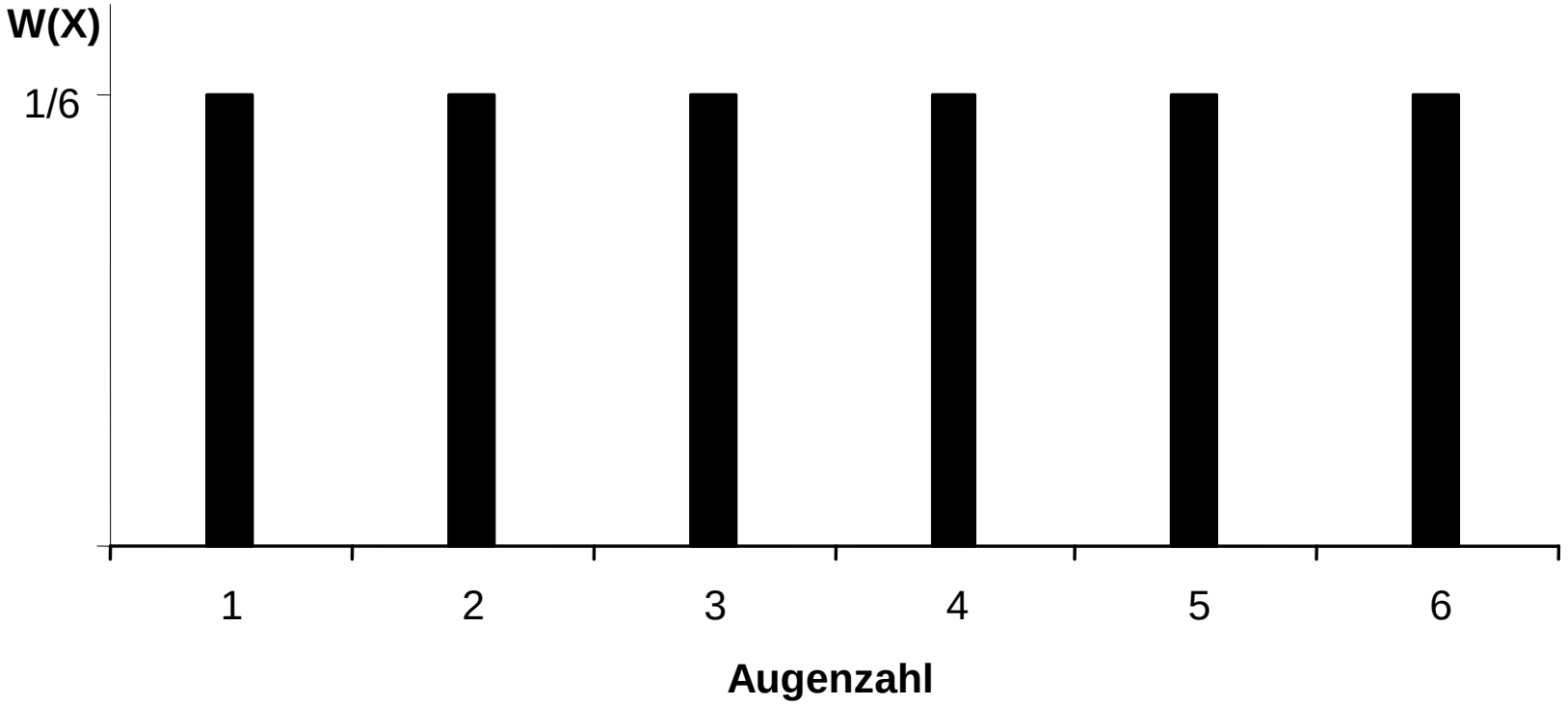
## 2. Beispiel für Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Oberböden in der Nordeifel werden anhand von 20 Proben auf ihren Zinkgehalt geprüft und mit dem Standardwert für Zink in Tongesteinen verglichen.

Der Mittelwert der Proben liegt unterhalb des Standardwerts für Zink in Tongesteinen.

Frage:
Ist dieser Unterschied zufällig, weil die Zahl der Proben zu gering ist und die Proben somit bezüglich ihres Zinkgehaltes nicht repräsentativ sind oder ist der Unterschied trotz der geringen Probenzahl nicht zufällig (signifikant) und der Boden in der Nordeifel kann als relativ arm an Zink eingestuft werden?

# Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beim einmaligen Würfelwurf




$$W(X = a) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

# Es gilt:

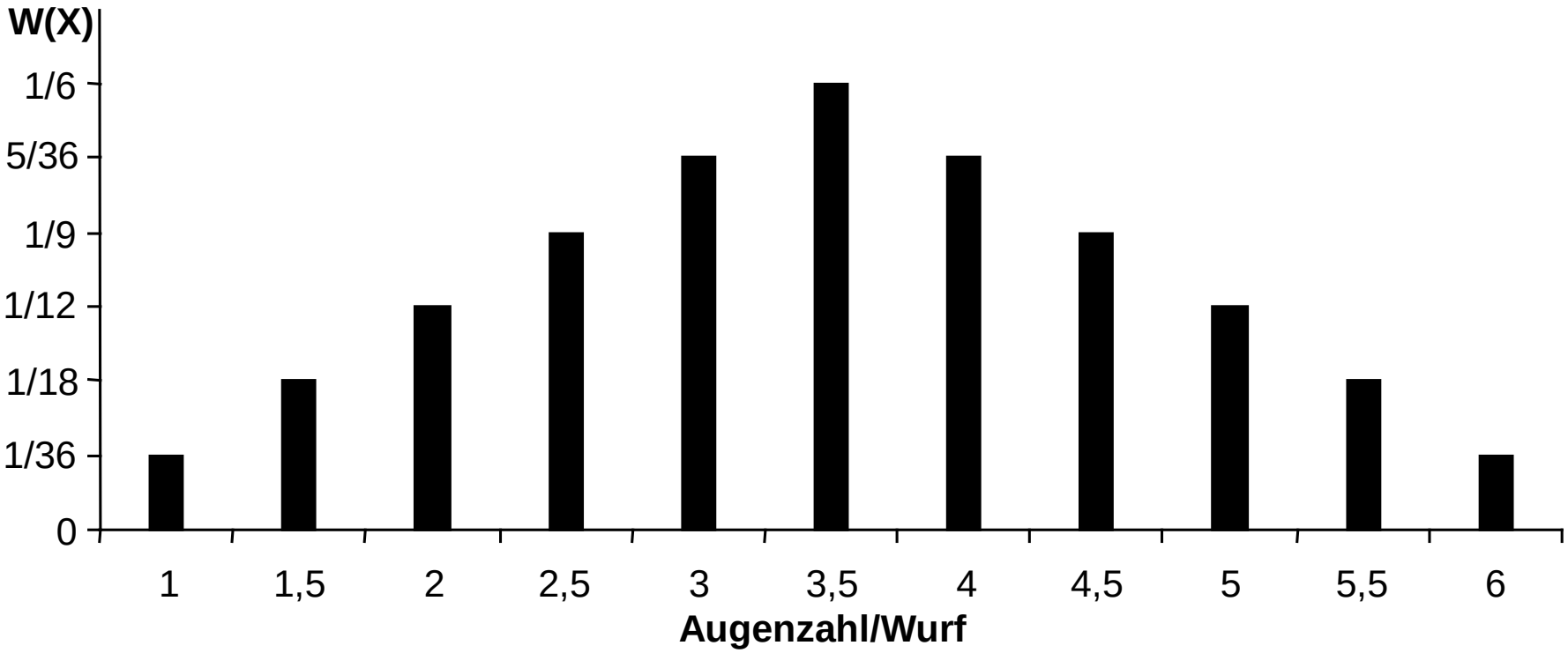
- Die Wahrscheinlichkeit ist immer eine Zahl zwischen 0 und 1:
  $0 \leq W \leq 1$.

- Die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist immer 1
  Beispiel einmaliges Würfeln:
  $W(X=1) + W(X=2) + ... + W(X=6) = 1/6 + 1/6 + ... + 1/6 = 1$

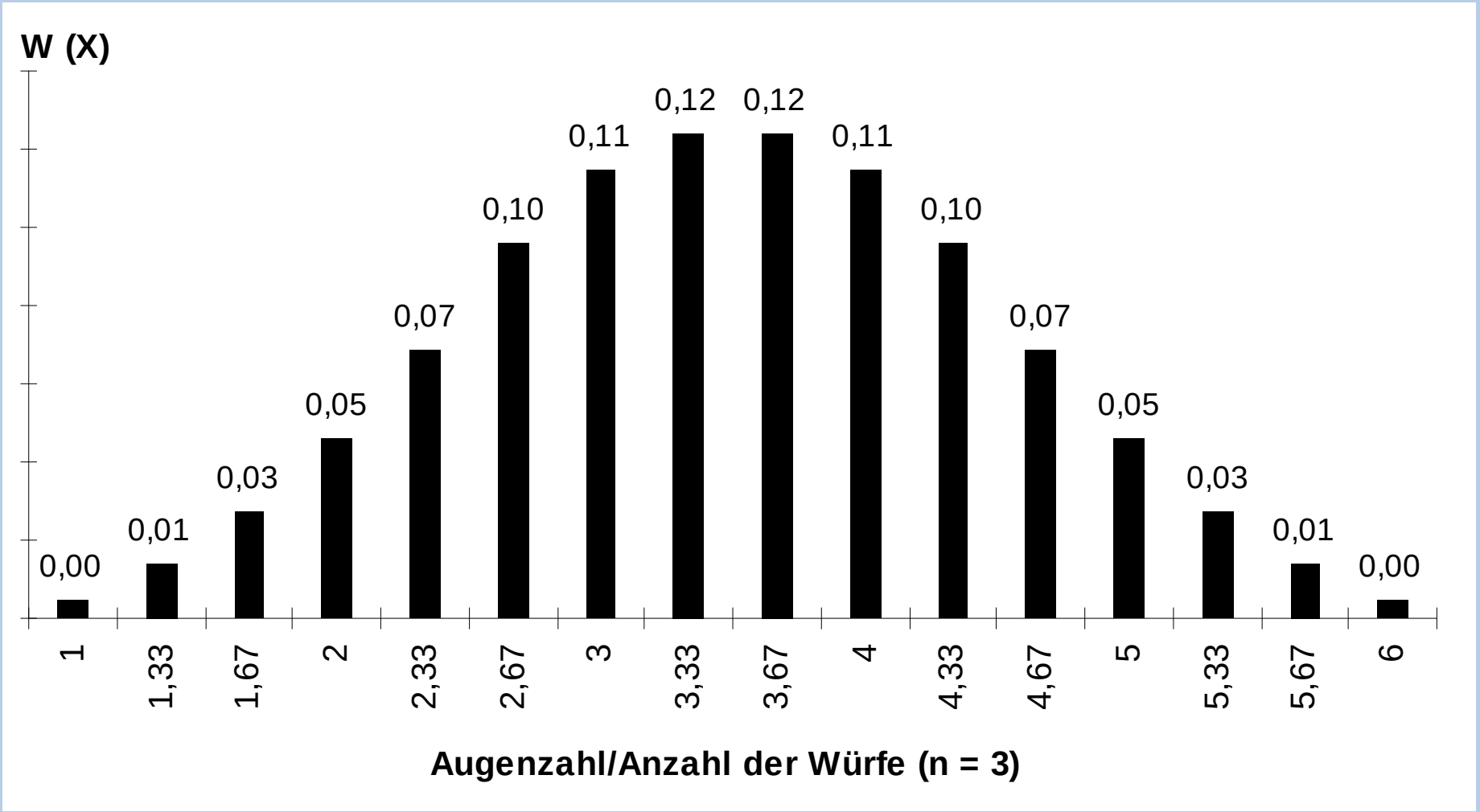
- Ein sicheres Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1, also
  $W(X=a) = 1$
  Beispiel einmaliges Würfeln: $W(X=1,2,3,4,5,6) = 1$

- Ein unmögliches Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0, also
  $W(X=a) = 0$
  Beispiel einmaliges Würfeln: $W(X=7) = 0$.

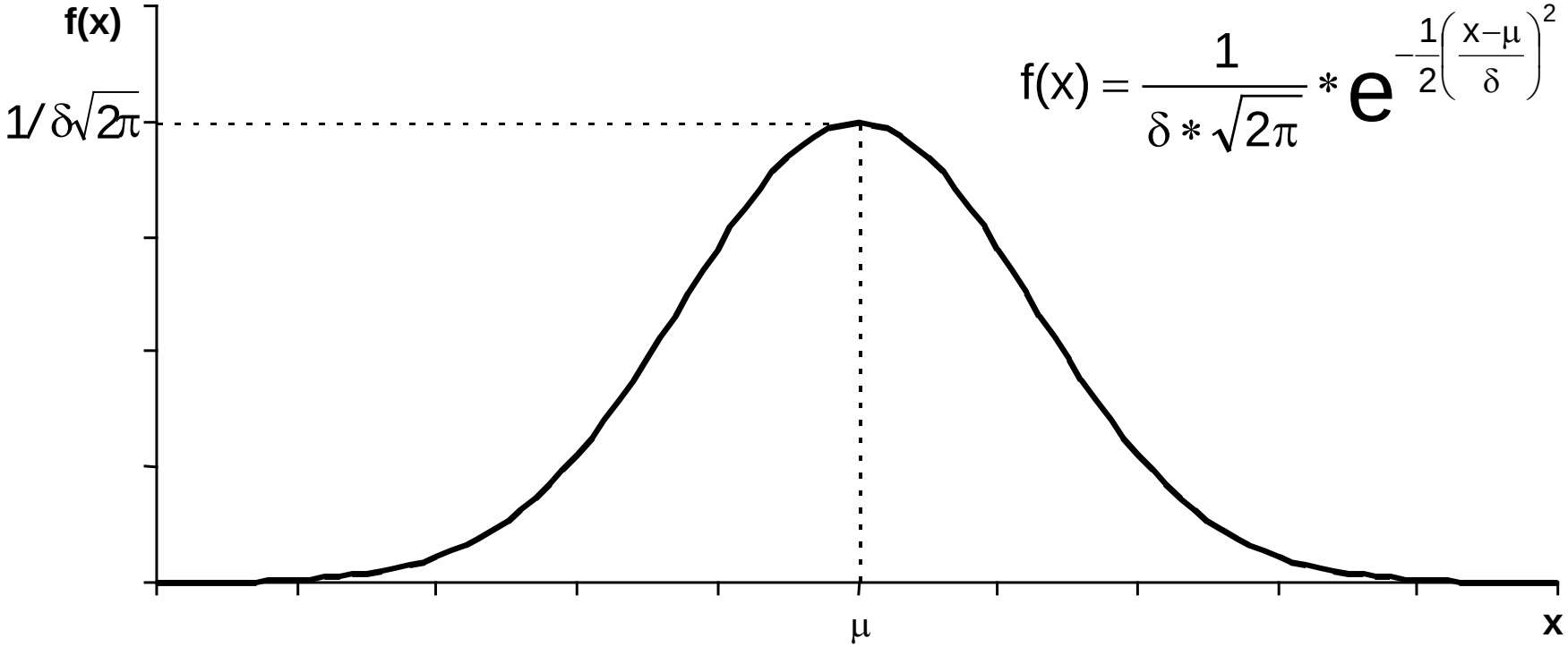
# Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beim zweimaligen Würfelwurf



# Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse beim dreimaligen Würfelwurf



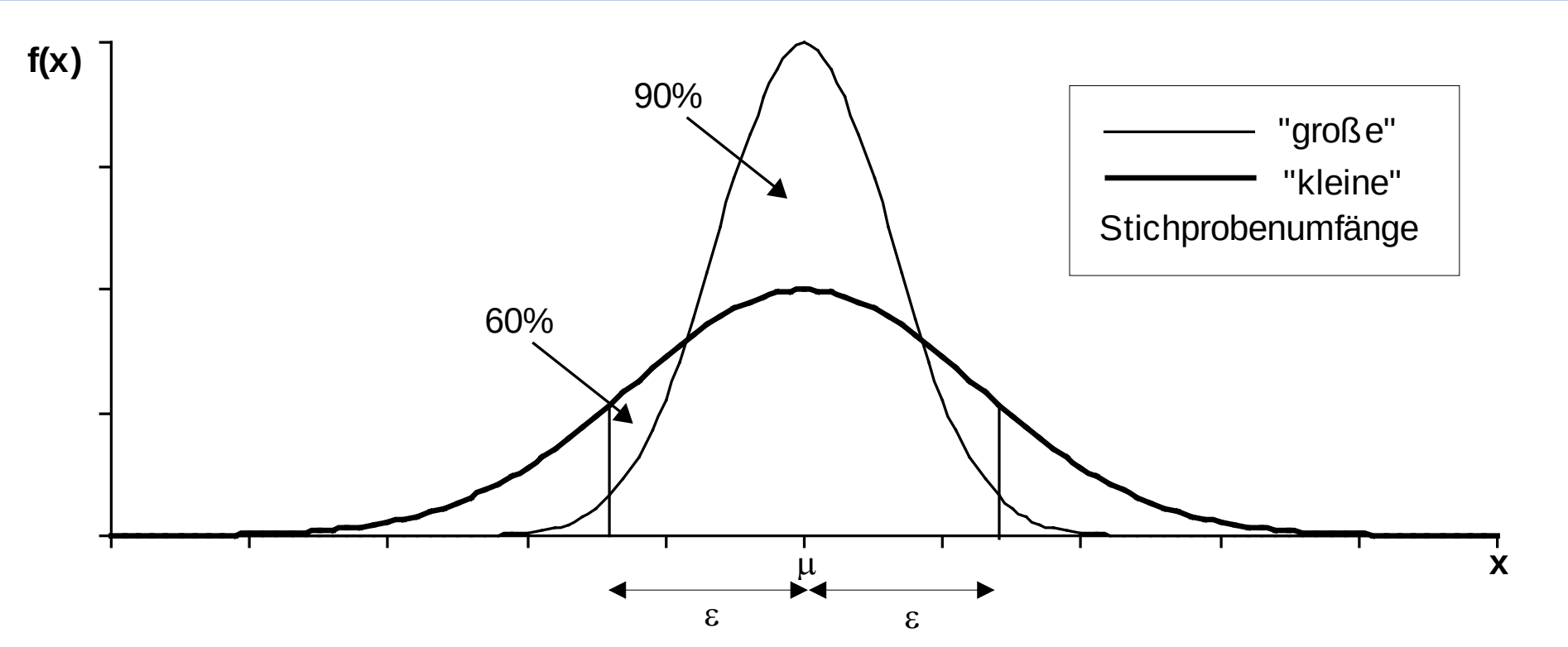
# Dichtefunktion der Normalverteilung (Gauß´sche Glockenkurve)




mit $\delta$ = Standardabweichung und
$\mu$ = tatsächlicher Mittelwert.

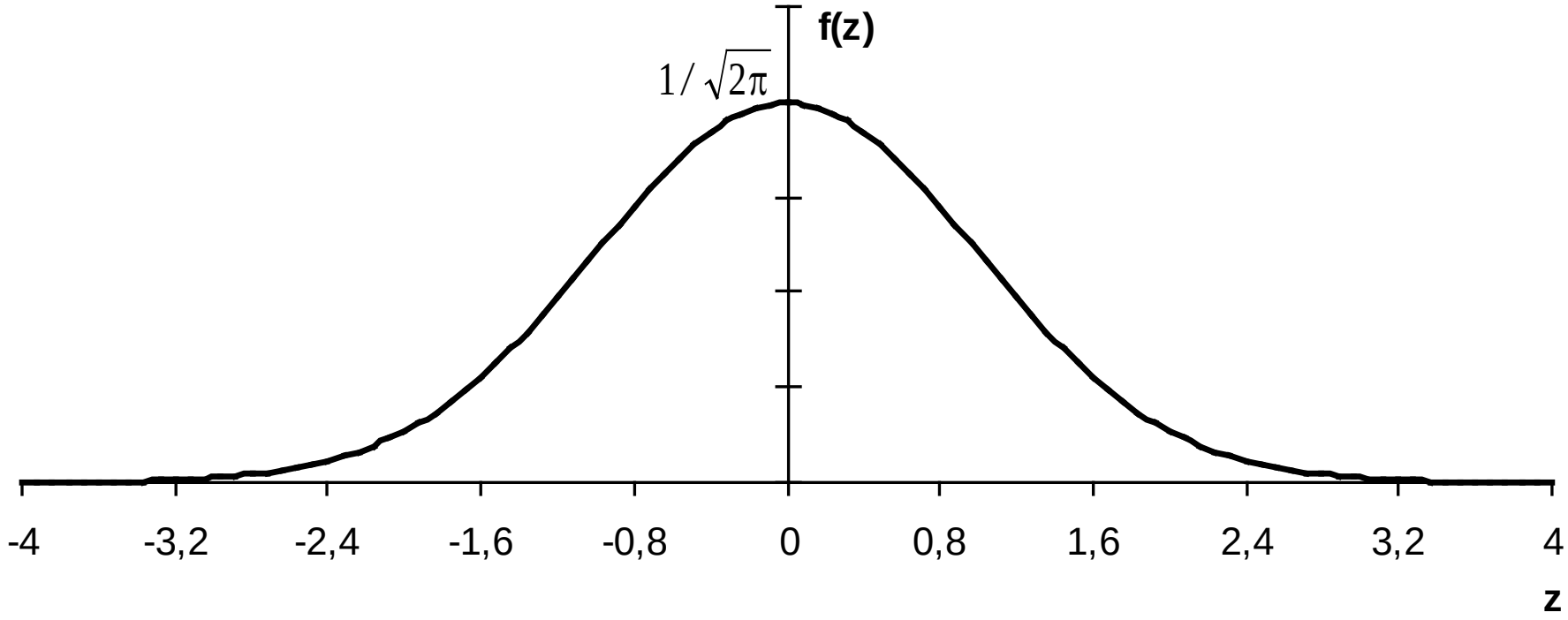
# Verlauf der Dichtefunktion für „kleine“ und für „große“ Stichprobenumfänge

(Prozentangaben zum jeweiligen Flächeninhalt sind geschätzt)



# Die Standardnormalverteilungsfunktion

führe z-Transformation (Standardisierung) durch: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$




$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

Tafel 2 Die Verteilungsfunktion $\phi(z)$ und die Funktion $D(z)$ der Standardnormalverteilung
Quelle: KREYSZIG 1968, S. 393–394

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$ $\quad D(z) = \phi(z) - \phi(-z)$

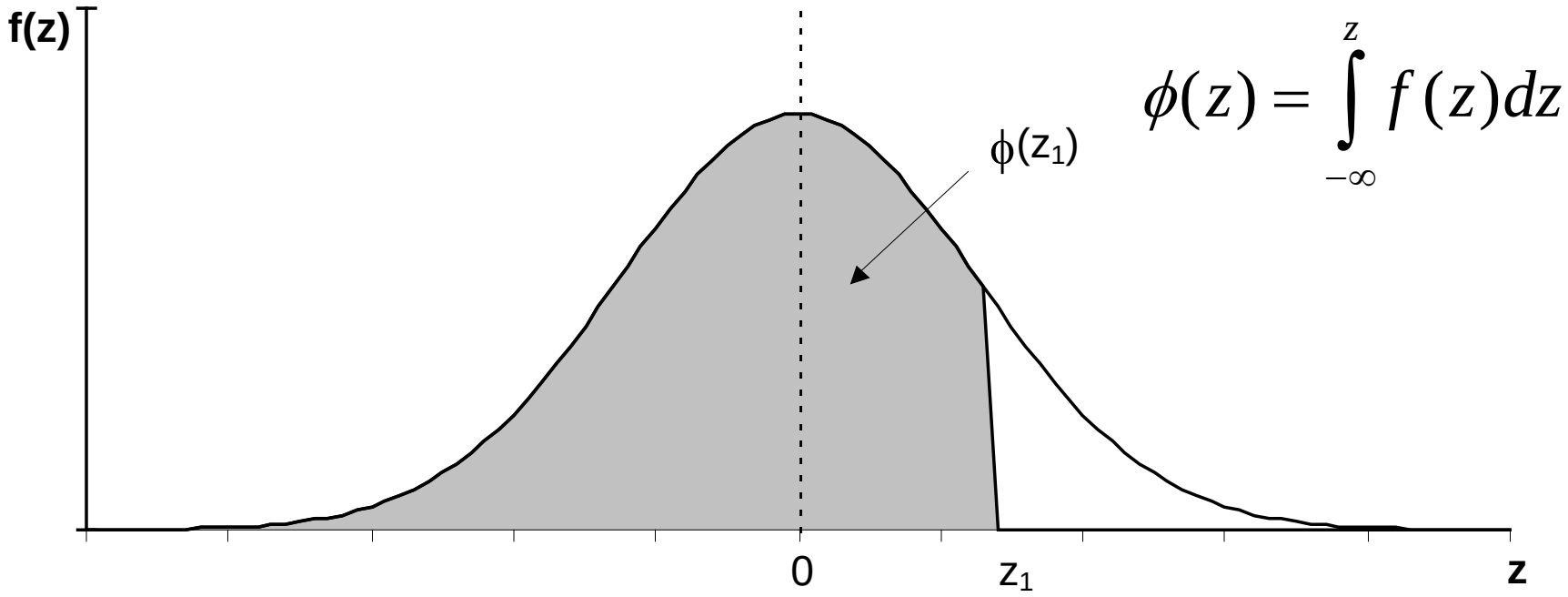
| $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ | $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ | $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ | $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0, | 0, | | 0, | 0, | | 0, | 0, | | 0, | 0, |
| 0,01 | 5040 | 0080 | 0,43 | 6664 | 3328 | 0,85 | 8023 | 6047 | 1,27 | 8980 | 7959 |
| 0,02 | 5080 | 0160 | 0,44 | 6700 | 3401 | 0,86 | 8051 | 6102 | 1,28 | 8997 | 7995 |
| 0,03 | 5120 | 0239 | 0,45 | 6736 | 3473 | 0,87 | 8078 | 6157 | 1,29 | 9015 | 8029 |
| 0,04 | 5160 | 0319 | 0,46 | 6772 | 3545 | 0,88 | 8106 | 6211 | 1,30 | 9032 | 8064 |
| 0,05 | 5199 | 0399 | 0,47 | 6608 | 3616 | 0,89 | 8133 | 6265 | 1,31 | 9049 | 8098 |
| 0,06 | 5239 | 0478 | 0,48 | 6844 | 3688 | 0,90 | 8159 | 6319 | 1,32 | 9066 | 8132 |
| 0,07 | 5279 | 0558 | 0,49 | 6879 | 3759 | 0,91 | 8186 | 6372 | 1,33 | 9082 | 8165 |
| 0,08 | 5319 | 0638 | 0,50 | 6915 | 3829 | 0,92 | 8212 | 6424 | 1,34 | 9099 | 8198 |
| 0,09 | 5359 | 0717 | 0,51 | 6950 | 3899 | 0,93 | 8238 | 6476 | 1,35 | 9115 | 8230 |
| 0,10 | 5398 | 0797 | 0,52 | 6958 | 3969 | 0,94 | 8264 | 6528 | 1,36 | 9131 | 8262 |
| 0,11 | 5438 | 0876 | 0,53 | 7019 | 4039 | 0,95 | 8289 | 6579 | 1,37 | 9147 | 8293 |
| 0,12 | 5478 | 0955 | 0,54 | 7054 | 4108 | 0,96 | 8315 | 6629 | 1,38 | 9162 | 8324 |
| 0,13 | 5517 | 1034 | 0,55 | 7088 | 4177 | 0,97 | 8340 | 6680 | 1,39 | 9177 | 8355 |
| 0,14 | 5557 | 1113 | 0,56 | 7123 | 4245 | 0,98 | 8365 | 6729 | 1,40 | 9192 | 8385 |
| 0,15 | 5596 | 1192 | 0,57 | 7157 | 4313 | 0,99 | 8389 | 6778 | 1,41 | 9207 | 8415 |
| 0,16 | 5636 | 1271 | 0,58 | 7190 | 4381 | 1,00 | 8413 | 6827 | 1,42 | 9222 | 8444 |
| 0,17 | 5675 | 1350 | 0,59 | 7224 | 4448 | 1,01 | 8438 | 6875 | 1,43 | 9236 | 8473 |
| 0,18 | 5714 | 1428 | 0,60 | 7257 | 4515 | 1,02 | 8461 | 6923 | 1,44 | 9251 | 8501 |
| 0,19 | 5753 | 1507 | 0,61 | 7291 | 4581 | 1,03 | 8485 | 6970 | 1,45 | 9265 | 8529 |
| 0,20 | 5793 | 1585 | 0,62 | 7324 | 4647 | 1,04 | 8508 | 7017 | 1,46 | 9279 | 8557 |
| 0,21 | 5832 | 1663 | 0,63 | 7357 | 4713 | 1,05 | 8531 | 7063 | 1,47 | 9292 | 8584 |
| 0,22 | 5871 | 1741 | 0,64 | 7389 | 4778 | 1,06 | 8554 | 7109 | 1,48 | 9306 | 8611 |
| 0,23 | 5910 | 1819 | 0,65 | 7422 | 4843 | 1,07 | 8577 | 7154 | 1,49 | 9319 | 8638 |
| 0,24 | 5948 | 1897 | 0,66 | 7454 | 4907 | 1,08 | 8599 | 7199 | 1,50 | 9332 | 8664 |
| 0,25 | 5987 | 1974 | 0,67 | 7486 | 4971 | 1,09 | 8621 | 7243 | 1,51 | 9345 | 8690 |
| 0,26 | 6026 | 2051 | 0,68 | 7517 | 5035 | 1,10 | 8643 | 7287 | 1,52 | 9357 | 8715 |
| 0,27 | 6064 | 2128 | 0,69 | 7549 | 5098 | 1,11 | 8665 | 7330 | 1,53 | 9370 | 8740 |
| 0,28 | 6103 | 2205 | 0,70 | 7580 | 5161 | 1,12 | 8686 | 7373 | 1,54 | 9382 | 8764 |
| 0,29 | 6141 | 2282 | 0,71 | 7611 | 5223 | 1,13 | 8708 | 7415 | 1,55 | 9394 | 8789 |
| 0,30 | 6179 | 2358 | 0,72 | 7642 | 5285 | 1,14 | 8729 | 7457 | 1,56 | 9406 | 8812 |
| 0,31 | 6217 | 2434 | 0,73 | 7673 | 5346 | 1,15 | 8749 | 7499 | 1,57 | 9418 | 8836 |
| 0,32 | 6255 | 2510 | 0,74 | 7704 | 5407 | 1,16 | 8770 | 7540 | 1,58 | 9429 | 8859 |
| 0,33 | 9293 | 2586 | 0,75 | 7734 | 5467 | 1,17 | 8790 | 7580 | 1,59 | 9441 | 8882 |
| 0,34 | 6331 | 2661 | 0,76 | 7764 | 5527 | 1,18 | 8810 | 7620 | 1,60 | 9452 | 8904 |
| 0,35 | 6368 | 2737 | 0,77 | 7794 | 5587 | 1,19 | 8830 | 7660 | 1,61 | 9463 | 8926 |
| 0,36 | 6406 | 2812 | 0,78 | 7823 | 5646 | 1,20 | 8849 | 7699 | 1,62 | 9474 | 8948 |
| 0,37 | 6443 | 2886 | 0,79 | 7852 | 5705 | 1,21 | 8869 | 7737 | 1,63 | 9484 | 8969 |
| 0,38 | 6480 | 2961 | 0,80 | 7881 | 5763 | 1,22 | 8888 | 7775 | 1,64 | 9495 | 8990 |
| 0,39 | 6517 | 3035 | 0,81 | 7910 | 5821 | 1,23 | 8907 | 7813 | 1,65 | 9505 | 9011 |
| 0,40 | 6554 | 3108 | 0,82 | 7939 | 5878 | 1,24 | 8925 | 7850 | 1,66 | 9515 | 9031 |
| 0,41 | 6591 | 3182 | 0,83 | 7967 | 5935 | 1,25 | 8944 | 7887 | 1,67 | 9525 | 9051 |
| 0,42 | 6628 | 3255 | 0,84 | 7995 | 5991 | 1,26 | 8962 | 7923 | 1,68 | 9535 | 9070 |

Tafel 2 (Fortsetzung)

| $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ | $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ | $z$ | $\phi(z)$ | $D(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0, | 0, | | 0, | 0, | | 0, | 0, |
| 1,69 | 9545 | 9090 | 2,13 | 9834 | 9668 | 2,57 | 9949 | 9898 |
| 1,70 | 9554 | 9109 | 2,14 | 9838 | 9675 | 2,58 | 9951 | 9901 |
| 1,71 | 9564 | 9127 | 2,15 | 9842 | 9684 | 2,59 | 9952 | 9904 |
| 1,72 | 9573 | 9146 | 2,16 | 9846 | 9692 | 2,60 | 9953 | 9907 |
| 1,73 | 9582 | 9164 | 2,17 | 9850 | 9700 | 2,61 | 9955 | 9909 |
| 1,74 | 9591 | 9181 | 2,18 | 9854 | 9707 | 2,62 | 9956 | 9912 |
| 1,75 | 9599 | 9199 | 2,19 | 9857 | 9715 | 2,63 | 9957 | 9915 |
| 1,76 | 9608 | 9216 | 2,20 | 9861 | 9722 | 2,64 | 9959 | 9917 |
| 1,77 | 9616 | 9233 | 2,21 | 9864 | 9729 | 2,65 | 9960 | 9920 |
| 1,78 | 9625 | 9249 | 2,22 | 9868 | 9736 | 2,66 | 9961 | 9922 |
| 1,79 | 9633 | 9265 | 2,23 | 9871 | 9743 | 2,67 | 9962 | 9924 |
| 1,80 | 9641 | 9281 | 2,24 | 9875 | 9749 | 2,68 | 9963 | 9926 |
| 1,81 | 9649 | 9297 | 2,25 | 9878 | 9756 | 2,69 | 9964 | 9929 |
| 1,82 | 9656 | 9312 | 2,26 | 9881 | 9762 | 2,70 | 9965 | 9931 |
| 1,83 | 9664 | 9328 | 2,27 | 9884 | 9768 | 2,71 | 9966 | 9933 |
| 1,84 | 9671 | 9342 | 2,28 | 9887 | 9774 | 2,72 | 9967 | 9935 |
| 1,85 | 9678 | 9357 | 2,29 | 9890 | 9780 | 2,73 | 9968 | 9937 |
| 1,86 | 9686 | 9371 | 2,30 | 9893 | 9786 | 2,74 | 9969 | 9939 |
| 1,87 | 9693 | 9385 | 2,31 | 9896 | 9791 | 2,75 | 9970 | 9940 |
| 1,88 | 9699 | 9399 | 2,32 | 9898 | 9797 | 2,76 | 9971 | 9942 |
| 1,89 | 9706 | 9412 | 2,33 | 9901 | 9802 | 2,77 | 9972 | 9944 |
| 1,90 | 9713 | 9426 | 2,34 | 9904 | 9807 | 2,78 | 9973 | 9946 |
| 1,91 | 9719 | 9439 | 2,35 | 9906 | 9812 | 2,79 | 9974 | 9947 |
| 1,92 | 9726 | 9451 | 2,36 | 9909 | 9817 | 2,80 | 9974 | 9949 |
| 1,93 | 9732 | 9464 | 2,37 | 9911 | 9822 | 2,81 | 9975 | 9950 |
| 1,94 | 9738 | 9476 | 2,38 | 9913 | 9827 | 2,82 | 9976 | 9952 |
| 1,95 | 9744 | 9488 | 2,39 | 9916 | 9832 | 2,83 | 9977 | 9953 |
| 1,96 | 9750 | 9500 | 2,40 | 9918 | 9836 | 2,84 | 9977 | 9955 |
| 1,97 | 9756 | 9512 | 2,41 | 9920 | 9840 | 2,85 | 9978 | 9956 |
| 1,98 | 9761 | 9623 | 2,42 | 9922 | 9845 | 2,86 | 9979 | 9958 |
| 1,99 | 9767 | 9534 | 2,43 | 9925 | 9849 | 2,87 | 9979 | 9959 |
| 2,00 | 9772 | 9545 | 2,44 | 9927 | 9853 | 2,88 | 9980 | 9960 |
| 2,01 | 9778 | 9556 | 2,45 | 9929 | 9857 | 2,89 | 9981 | 9961 |
| 2,02 | 9783 | 9566 | 2,46 | 9931 | 9861 | 2,90 | 9981 | 9963 |
| 2,03 | 9788 | 9576 | 2,47 | 9932 | 9865 | 2,91 | 9982 | 9964 |
| 2,04 | 9793 | 9586 | 2,48 | 9934 | 9869 | 2,92 | 9982 | 9965 |
| 2,05 | 9798 | 9596 | 2,49 | 9936 | 9872 | 2,93 | 9983 | 9966 |
| 2,06 | 9803 | 9606 | 2,50 | 9938 | 9876 | 2,94 | 9984 | 9967 |
| 2,07 | 9808 | 9615 | 2,51 | 9940 | 9879 | 2,95 | 9984 | 9968 |
| 2,08 | 9812 | 9625 | 2,52 | 9941 | 9883 | 2,96 | 9985 | 9969 |
| 2,09 | 9817 | 9634 | 2,53 | 9943 | 9886 | 2,97 | 9985 | 9970 |
| 2,10 | 9821 | 9643 | 2,54 | 9945 | 9889 | 2,98 | 9986 | 9971 |
| 2,11 | 9826 | 9651 | 2,55 | 9946 | 9892 | 2,99 | 9986 | 9972 |
| 2,12 | 9830 | 9660 | 2,56 | 9948 | 9895 | 3,00 | 9987 | 9973 |

Quelle: Bahrenberg et al. 1999, S. 224-225

# Linksseitige Wahrscheinlichkeit der Standardnormalverteilung




Es gilt: $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

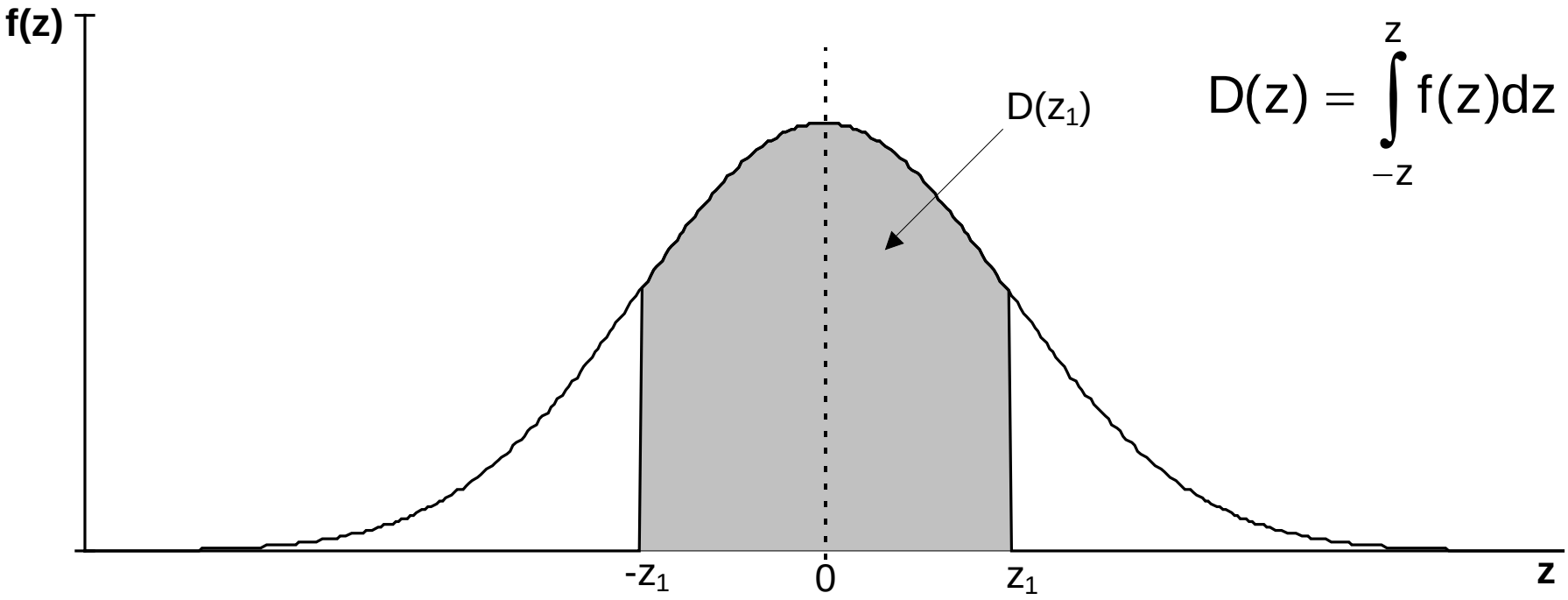
Beispiele für linksseitige Wahrscheinlichkeiten

a) $\phi(0{,}5) = W(Z \leq 0{,}5) = 0{,}6915 = 69{,}15\%$

*b)* $\phi(2) = W(Z \leq 2) = 0{,}9772 = 97{,}72\%$

*c)* $\phi(-1) = W(Z \leq -1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587 = 15{,}87\%$

# Zentrale Wahrscheinlichkeit der Standardnormalverteilung




Beispiele für zentrale Wahrscheinlichkeiten:

a) D(0,5) = *W( -0,5 ≤ Z ≤ 0,5)* = 0,3829 = 38,29%

b) D(1,0) = *W( -1,0 ≤ Z ≤ 1,0)* = 0,6827 = 68,27%

# Rechenbeispiel für eine Über- und Unterschreitungswahrscheinlichkeit:

(übernommen von Dr. Merja Hoppe, Universität Marburg)

Ein Fluss soll eingedeicht werden, um ein Gebiet vor Überschwemmungen zu schützen. Aus langjährigen Messreihen der jährlichen Höchstwasserstände wurden folgende Werte ermittelt:

Mittelwert: $\mu = 4$ m
Standardabweichung: $\sigma = 2$m

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet der jährliche Höchstwasserstand die Marke von 7m?

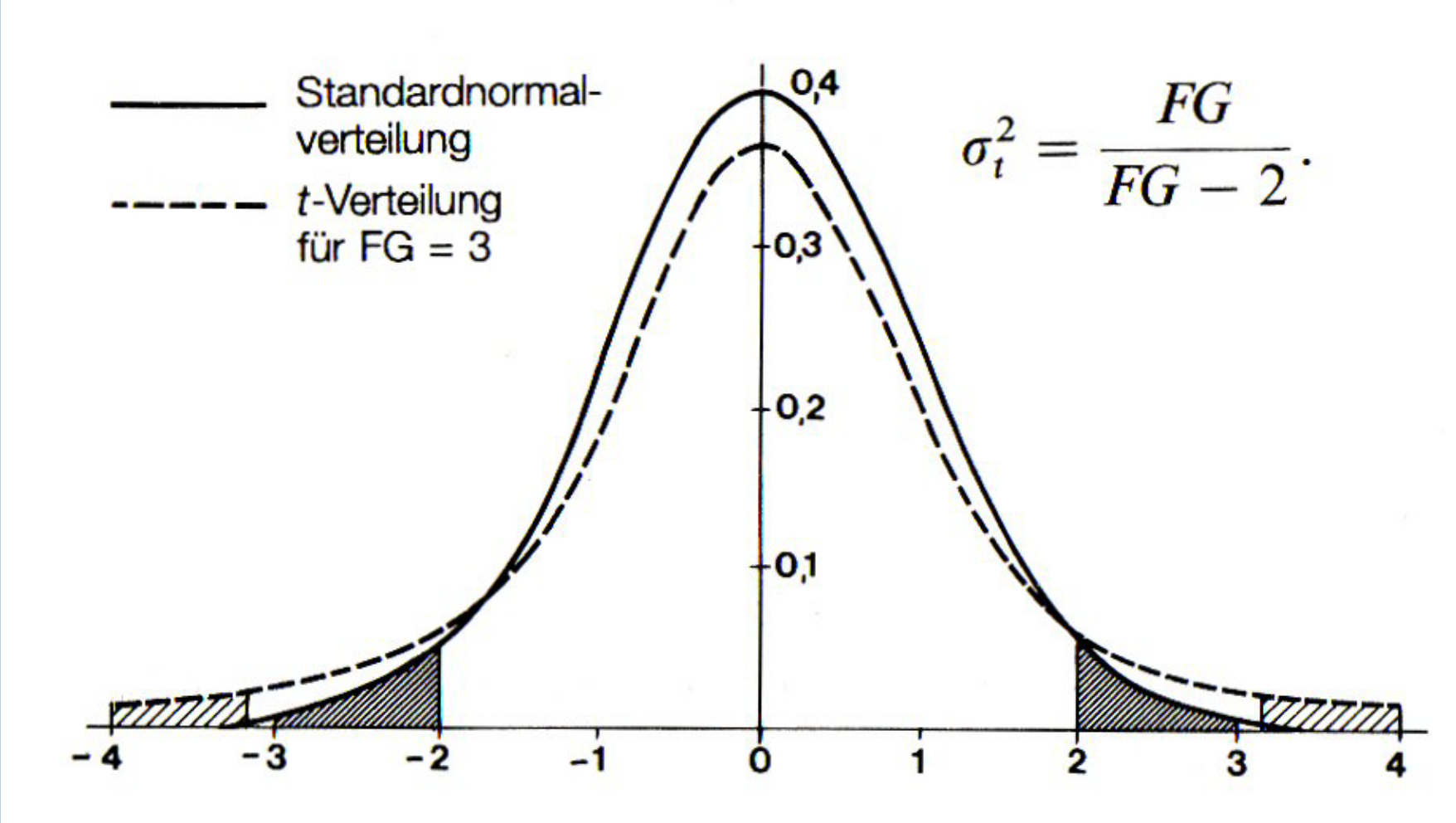
b) Welchen Mindestwert erreicht das sogenannte 100jährige Hochwasser?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die jährlichen Höchstwasserstände zwischen 4m und 7m liegen?

**Gehen Sie davon aus, dass die jährlichen Höchststände normalverteilt sind.**

# 7.2 t-Verteilung und t-Test

**Die t-Verteilung (für FG=3) im Vergleich zur Standardnormalverteilung**




Quelle: Bahrenberg et al. (1999), S. 105

# t-Verteilung für verschiedene Signifikanzniveaus und Freiheitsgrade

Es gilt $F(t) = 1 - \alpha$, z. B. $F(6,31) = 0,95$ bei $FG = 1$. Bei zweiseitiger Fragestellung müssen die Signifikanzniveaus verdoppelt werden

| | Signifikanzniveaus in % | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *FG* | 10% | 5% | 2,5% | 1% | 0,5% | 0,1% |
| 1 | 3,08 | 6,31 | 12,7 | 31,8 | 63,7 | 318,3 |
| 2 | 1,89 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,93 | 22,3 |
| 3 | 1,64 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 10,2 |
| 4 | 1,53 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 7,17 |
| 5 | 1,48 | 2,02 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 5,89 |
| 6 | 1,44 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,21 |
| 7 | 1,42 | 1,90 | 2,37 | 3,00 | 3,50 | 4,79 |
| 8 | 1,40 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 4,50 |
| 9 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,30 |
| 10 | 1,37 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,14 |
| 11 | 1,36 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,03 |
| 12 | 1,36 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,06 | 3,93 |
| 13 | 1,35 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,85 |
| 14 | 1,35 | 1,76 | 2,15 | 2,62 | 2,98 | 3,79 |
| 15 | 1,34 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,73 |
| 16 | 1,34 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,69 |
| 17 | 1,33 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,65 |
| 18 | 1,33 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,61 |
| 19 | 1,33 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,58 |
| 20 | 1,33 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,55 |
| 22 | 1,32 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,51 |
| 24 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,47 |
| 26 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,44 |
| 28 | 1,31 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,41 |
| 30 | 1,31 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,39 |
| 40 | 1,30 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,31 |
| 50 | 1,30 | 1,68 | 2,01 | 2,40 | 2,68 | 3,26 |
| 100 | 1,29 | 1,66 | 1,98 | 2,37 | 2,63 | 3,17 |
| ∞ | 1,28 | 1,65 | 1,96 | 2,33 | 2,60 | 3,09 |

Quelle: Bahrenberg et al. 1999, S. 226

# Freiheitsgrade (FG)

Der Freiheitsgrad einer Prüfverteilung ist die Anzahl der Stichprobenelemente, die zur Berechnung eines statistischen Parameters aus der Stichprobe notwendig sind.

**Beispiel:** Wird als Prüfgröße der Mittelwertes einer Stichprobe errechnet, so sind dazu alle Stichprobenelemente n erforderlich. Entsprechend ist der Freiheitsgrad FG = n.

Für die Standardabweichung werden noch n-1 Elemente der Stichprobe gebraucht, denn das letzte Element lässt sich theoretisch aus dem zuvor bestimmten Mittelwert berechnen. Also FG = n-1.

Allgemein gilt : Der Freiheitsgrad ist gleich der Anzahl der Stichprobenelemente minus der Anzahl der bereits bestimmten statistischen Parameter, die zur Berechnung weiterer Parameter notwendig sind.

# Allgemeines Testverfahren: Anwendungsbeispiel t-Test

Die Oberböden in der Nordeifel werden anhand von n = 20 Proben auf ihren Zinkgehalt geprüft und mit dem Standardwert für Zink in Tongesteinen verglichen. Dieser Standardwert liegt bei a = 95 ppm (Tongesteinstandard)

Der Mittelwert der 20 Proben unterscheidet sich vom Standardwert.
Er liegt bei $\mu$ = 91 ppm,
die Standardabweichung der 20 Proben beträgt $\sigma$ = 10 ppm.

Frage: Liegt dieser Unterschied im Zufallsbereich (z.B. wegen einer zu geringen Zahl der Proben) und die Proben sind bezüglich ihres Zinkgehaltes nicht repräsentativ oder ist der Unterschied nicht zufällig (signifikant) und der Boden in der Nordeifel ist relativ arm an Zink?

**Gegeben:**

Standardwert für Zink in Tongesteinen: a = 95ppm

20 Proben mit $\mu$ = 91 ppm,

und $\sigma$ = 10 ppm.

Frage: Liegt dieser Unterschied im Zufallsbereich (z.B. wegen einer zu geringen Zahl der Proben) und die Proben sind bezüglich ihres Zinkgehaltes nicht repräsentativ oder ist der Unterschied nicht zufällig (signifikant) und der Boden in der Nordeifel ist relativ arm an Zink?

**Lösungsweg:**

Führe einseitigen t-Test durch, weil die Richtung der Abweichung (< oder >) In diesem Fall klar ist, denn der Mittelwert der Messwerte ist kleiner als der Referenzwert. Abweichungen nach oben müssen also nicht betrachtet werden.

**a) Formulierung der Hypothesen $H_0$ (Nullhypothese) und $H_A$ (Alternativhypothese)**

$H_0$: Zwischen dem Tongesteinstandardwert und dem Mittelwert der Stichprobe besteht kein signifikanter Unterschied. (Die Abweichung ist zufällig durch die Stichprobenauswahl bestimmt).

$H_A$: Der Stichprobenwert ist signifikant kleiner als der Standardwert.

**b) Festlegung des Signifikanzniveaus ($\alpha$)**

| | |
|---|---|
| $\alpha$ = 5%: | signifikant * |
| $\alpha$ = 1%: | sehr signifikant ** |
| $\alpha$ = 0,1%: | hochsignifikant *** |

Beispiel:
Der Mittelwert der Stichprobe soll zum $\alpha$ = 5% Signifikanz-Niveau getestet werden.

**c) Bestimmung der Prüfgröße hinsichtlich der Abweichung und des entsprechenden Vergleichswertes aus der Tabelle der t-Verteilung**

Die Prüfgröße für einen solchen Mittelwerttest lautet:

$$t = \frac{\mu - a}{\sigma / \sqrt{n}}$$

mit

$\mu$ = Mittelwert der Stichprobe
a = Vergleichswert, an dem die Abweichung bemessen werden soll
$\sigma$ = Standardabweichung der Stichprobe
n = Stichprobenumfang.

Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt FG = n-1 = 19,
weil in die Prüfgröße die Standardabweichung der Stichprobe enthält.

Lese aus der Tabelle für die t-Verteilung den entsprechendem Wert für FG=19 und ein Signifikanzniveau $\alpha$ = 5% ab:

$t_{5\%;19} = 1{,}73$

Wenn nun die Abweichung der Prüfgröße den Wert $t_{5\%;19} = 1{,}73$ übersteigt, dann liegt keine zufallsbedingte, sondern eine systematische (signifikante) Abweichung vor.

**d) Berechne t für die Werte der Stichprobe**

$$t = \frac{\mu - a}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{91 - 95}{10 / \sqrt{20}} = \frac{4}{10 / 4{,}472} = \frac{4}{2{,}236} = 1{,}7889$$

**e) Ergebnis und Antwort:**

$t = 1{,}7889 > 1{,}73, = t_{5\%,19}$

Der errechnete Wert liegt außerhalb der vorgegebenen Prüfgröße. Die Zinkarmut in den 20 Bodenproben der Nordeifel ist also gegenüber dem Standardwert keine zufällige, sondern eine signifikante Abweichung (Signifikanzniveau 5%).

Mit anderen Worten:
Die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass die Böden der Nordeifel zinkarm sind, beträgt 5%.

**<u>Frage:</u> Ist die Abweichung auch sehr signifikant ** oder gar hochsignifikant ***?**

Vergleiche die Prüfgröße $t = 1{,}7889$ mit den Vergleichswerten für ein Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ und $\alpha = 0{,}1\%$

Es gilt: $t = 1{,}7889 < t_{1\%,19} = 2{,}54$

und $t = 1{,}7889 < t_{0{,}1\%,19} = 3{,}58$

Daher ist die Abweichung nur signifikant zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, aber nicht sehr Signifikant (Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$) oder gar hochsignifikant ($\alpha = 0{,}1\%$).

# 2. Beispiel

Der durchschnittliche Intelligenzquozient (IQ) liegt bei 100.
In den beiden Statistik-Übungen wurden für die Teilnehmer die folgende Werte ermittelt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kurs A: | $n = 33$ | Kurs B: | $n = 71$ |
| | $\mu = 105$ | | $\mu = 103$ |
| | $\sigma = 11$ | | $\sigma = 9$ |

Testen Sie für jeden Kurs, ob die Abweichungen signifikant sind und wenn ja, zu welchem Signifikanzniveau.